Kapitel 12

Appendix (nicht Prüfungsstoff)

Beweis von Satz 4.4 Wir beweisen das (nichttriviale) Resultat in 2 Schritten und zeigen zuerst Super- und dann Sub-σ-Additivität:
Schritt 1: (a) Die Familie $\mathcal{I}_1$ gemäß (1.6) ist offensichtlich durchschnittsstabil und erfüllt, dass sich für $(a_1, b_1] \subseteq (a_2, b_2]$ die Menge $(a_2, b_2] \setminus (a_1, b_1]$ als disjunkte Vereinigung von maximal zwei Elementen von $\mathcal{I}_1$ schreiben lässt. Wir definieren $\mathcal{R}$ durch

$$\mathcal{R} := \Big\{ \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] : n \in \mathbb{N}, (a_1, b_1], \ldots, (a_n, b_n] \text{ paarweise disjunkt} \Big\}$$

und setzen für $\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \in \mathcal{R}$

$$\mu_F\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]\Big) := \sum_{i=1}^{n} \mu_F((a_i, b_i]). \tag{12.1}$$

Beachten Sie, dass im Fall $\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \in \mathcal{I}_1$ Gleichung (12.1) automatisch gilt, die Fortsetzung von μ_F auf $\mathcal{R}$ also konsistent ist, dass $\mathcal{R}$ wieder durchschnittsstabil ist, und abgeschlossen gegenüber endlichen Vereinigungen paarweise disjunkter Mengen ist.
(b)(1) Sei nun $A, B \in \mathcal{R}$ und gelte $A \subseteq B$. Dann $B = A \cup (B \setminus A)$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{R}$ (und damit von Mengen aus $\mathcal{I}_1$) und es gilt $\mu_F(B) = \mu_F(A) + \mu_F(B \setminus A)$, insbesondere also $\mu_F(B) - \mu_F(A) = \mu_F(B \setminus A) \geq 0$.
(b)(2) Für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt offensichtlich $B = \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{R}} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{R}}$ sowie $A \cup B = A \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{R}}$, also auch

$$\mu_F(A) + \mu_F(B) = \mu_F(A) + \mu_F(B \setminus A) + \mu_F(A \cap B) = \mu_F(A \cup B) + \mu_F(A \cap B).$$

(b)(3) Für beliebige Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ folgt mit $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \Big)$ und (b1), (b2)

$$\mu_F\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mu_F\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_F(A_i).$$

(b)(4) Für beliebiges $B \in \mathcal{R}$ und paarweise disjunkten Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq B$ gilt damit

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_F(A_i) = \mu_F\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \mu_F(B)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Im Falle $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = B$ erhalten wir also die gewünschte Super-σ-Additivität auf ganz $\mathcal{R}$, und damit auch auf $\mathcal{I}_1$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i) \le \mu_F\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \tag{12.2}$$

Schritt 2: Wir zeigen die Umkehrung von Ungleichung (12.2) für Mengen in $\mathcal{I}_1$. Seien also $(a_1, b_1], (a_2, b_2], \ldots \in \mathcal{I}_1$ paarweise disjunkt und gelte $\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i] =: (a, b] \in \mathcal{I}_1$. Sei $\varepsilon > 0$. Rechtsstetigkeit von F impliziert die Existenz von $\alpha > a$ und $\beta_i > b_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit

$$F(\alpha) \le F(a) + \varepsilon \quad \text{und} \quad F(\beta_i) \le F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Für das kompakte Interval $[\alpha, b]$ gilt $[\alpha, b] \subseteq (a, b] = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, \beta_i)$, also (Definition von Kompaktheit oder Satz von Heine-Borel) existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$ mit $[\alpha, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(a_i, \beta_i)$. Nachdem Punkt (b1) und (b3) $\mu_F((\alpha, b]) \le \sum_{i=1}^{N} \mu_F((a_i, \beta_i])$ liefern, folgt insgesamt

$$\mu_F((a, b]) \le \mu_F((\alpha, b]) + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{N} \Big(\mu_F((a_i, b_i]) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F((a_i, b_i]) + 2\varepsilon$$

Nachdem $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Satz 12.1 (Satz von der monotonen Konvergenz) *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folgen nicht-negativer Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die punktweise gegen X konvergiert. Dann ist X eine Zufallsvariable und es gilt*†

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$$

Beweis von Satz 12.1 Satz 5.1 und Bemerkung 5.2 implizieren die Messbarkeit von X, aus Gleichung (5.7) folgt $\mathbb{E}(X_n) \le \mathbb{E}(X_{n+1}) \le \mathbb{E}(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir also $a := \lim_{n\in\mathbb{N}} E(X_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E(X_n) \in [0, \infty]$, dann gilt offensichtlich $a \le \mathbb{E}(X)$.
Um $\mathbb{E}X \le a$ zu zeigen gehen wir wie folgt vor: Sei $Z \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A})$ und $Z \le X$. Betrachte ein beliebiges aber festes $c \in (0, 1)$ und setze

$$E_n := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \ge cZ(\omega)\} \in \mathcal{A}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und es gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. Daraus folgt

$$\mathbb{E}(X_n) \ge \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{E_n}) \ge \mathbb{E}(cZ\mathbf{1}_{E_n}) = c\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{E_n})$$

und für $n \to \infty$ ergibt sich $a \ge c\mathbb{E}Z$. Da $c \in (0, 1)$ beliebig war folgt insgesamt $a \ge \mathbb{E}Z$. Nachdem außerdem auch $Z \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A})$ beliebig war ergibt sich damit unter Verwendung von Gleichung (5.7) $a \ge \mathbb{E}X$. ■

Satz 12.2 (Lemma von Fatou) *Für jede Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt*

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n\right). \tag{12.3}$$

†der limes ist hier wiederum in $[0, \infty]$ zu verstehen, i.e. falls $\mathbb{E}X = \infty$ dann gilt für jedes $M \in [0, \infty)$ ab einem Index $n_0 = n_0(M)$ auch $\mathbb{E}(X_n) > M$.

Beweis von Satz 12.2: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ setzen wir $Y_n(\omega) := \inf_{k \geq n} X_k(\omega)$. Dann gilt $Y_n \leq X_n$ und damit $\mathbb{E}(Y_n) \leq \mathbb{E}(X_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Weiters ist die Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend mit Grenzwert $\liminf_{n \to \infty} X_n$. Die Aussage ergibt sich daher unmittelbar durch Anwendung des Satzes von der monotones Konvergenz. ■

Satz 12.3 (Satz von der majorisierten Konvergenz) *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die punktweise gegen X konvergiert. Weiters existiere eine integrierbare Zufallsvariable Y mit $Y \geq |X_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$

Beweis von Satz 12.3: Wegen $Y \geq |X_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $Y \geq |X|$, somit ist X integrierbar. Weiters folgt $|X_n - X| \leq 2Y$ und damit $Z_n := 2Y - |X_n - X| \geq 0$. Anwendung des Lemmas von Fatou auf die Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liefert

$$\mathbb{E}(2Y) \leq \liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}\left(2Y - |X_n - X|\right) = \mathbb{E}(2Y) - \limsup_{n \to \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|)$$

und damit $\limsup_{n \to \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$. Daraus folgt $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$, und, unter Verwendung von Ungleichung (5.9) $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$. ■

Satz 12.4 (Transformationssatz für zweidimensionale Dichten) *Sei $(X, Y) \sim \mu_f$ und $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Borel messbar. Weiters seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

1. *Es existieren offene Mengen $M_1, \ldots, M_n$ mit $\int_{\bigcup_{i=1}^n M_i} f(x, y) dx dy = 1$. T_i bezeichne die Einschränkung von T auf M_i, T_i^{-1} die Inverse davon.*

2. *Jedes T_i ist auf ganz M_i differenzierbar und injektiv und die Funktionaldeterminante Δ_i von T_i ist ungleich 0.*

Dann ist $T_i(M_i)$ offen und $T \circ (X, Y)$ absolut stetig mit Dichte

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f \circ T_i^{-1}(x, y)}{|\Delta_i \circ T_i^{-1}(x, y)|} \mathbf{1}_{T_i(M_i)}(x, y).$$