1. Übung am 20. März 2018

UV Angewandte Statistik (405.330), Ass.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 1 Verwenden Sie das CLT, um ein approximatives Konfidenzintervall für den Parameter λ einer Poissonverteilung zu konstruieren.
(R): Überprüfen Sie die Güte des Konfidenzintervalls für verschiedene samples sizes n mittels Simulationen.

Übungsaufgabe 2 Es seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. mit stetiger Verteilungsfunktion F. $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ bezeichne die Ordnungsstatistik (i.e. $X_{(1)}$ bezeichne den kleinsten Wert, $X_{(2)}$ den zweitkleinsten Wert der Stichprobe, etc.). Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_i := F_{X_{(i)}}$ von $X_{(i)}$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$.
(R): Überprüfen Sie Ihr Resultat mittels Simulationen für eine beliebiges, von Ihnen gewähltes F.

Übungsaufgabe 3 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge mit stetiger Verteilungsfunktion F, F_n bezeichne die empirische Verteilungsfunktion gemäß Gleichung (7.3). Zeigen Sie, dass die Verteilung der Zufallsvariable D_n, definiert durch

$$D_n(\omega) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x)(\omega) - F(x)|$$

unabhängig von F ist.
Hinweis: Gehen Sie in zwei Schritten vor: (i) Überlegen Sie sich zuerst, dass es für die Berechnung des supremums ausreicht, sich auf Sprungstellen von F_n (welche Punkte sind das?) zu beschränken. (ii) Verwenden Sie die Integraltransformation und Übungsaufgabe 2.

Übungsaufgabe 4 (ergänzende Simulation zu Aufgabe 3) Simulieren Sie die Verteilung von D_n für $n = 1000$ und den Fall, dass X exponentialverteilt mit Parameter $\theta = 1$ ist. Wiederholen Sie die Simulation für den Fall $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und stellen Sie die beiden Verteilungen mittels eines Histogramms gegenüber.

Übungsaufgabe 5 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge mit Verteilungsfunktion F, F_n bezeichne die empirische Verteilungsfunktion gemäß Gleichung (7.3). Berechnen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ die Kovarianz von $F_n(x)$ und $F_n(y)$.
Bestätigen Sie Ihr Resultat mittels Simulationen in R.