

01. Übung am 11. März 2024

UV Angewandte Statistik (405.170)

Link Ankreuzliste: siehe www.truttschnig.net/courses

Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik oder das Angewandte Statistik Skriptum.

Übungsaufgabe 1. Sei $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ mit $a < b$. Wir betrachten die beiden Schätzer $\hat{a}_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ und $\hat{b}_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Berechnen Sie die Erwartungswerte von \hat{a}_n und \hat{b}_n für $n \in \{1, 2\}$ - sind \hat{a}_n und \hat{b}_n erwartungstreu? Sind die Schätzer stark konsistent? Bestätigen Sie Ihre Antwort mittels Simulationen in R.

Übungsaufgabe 2. Sei X exponentialverteilt und X_1, \dots, X_n eine Stichprobe von X . Aus der VO wissen wir, dass $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$ ein stark konsistenter Schätzer für θ ist. Beweisen Sie, dass auch der Schätzer $\hat{\psi}_n := -\log(1 - F_n(1))$ stark konsistent für θ ist und überlegen Sie sich, wie man auf den Schätzer $\hat{\psi}_n$ kommt.

Finden Sie weiters mit Hilfe von R heraus, welcher der beiden Schätzer besser ist, indem Sie für ein festes, von Ihnen gewähltes $\theta \in (0, \infty)$ insgesamt $R = 1000$ Mal Stichproben der Größe $n = 100$ generieren, beide Schätzer berechnen, und dann deren Fehler vergleichen (Boxplot oder Ähnliches).

Übungsaufgabe 3. Sei $\hat{\theta}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer von $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Ist dann $(\hat{\theta}_n)^2$ auch erwartungstreuer Schätzer von θ^2 ? Wenn nein, wie groß ist die Verzerrung?

(R) Betrachten Sie $X \sim \mathcal{N}(\theta, 2^2)$ und den erwartungstreuer Schätzer $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$ für θ . Wählen Sie $n = 100$, erzeugen Sie für von Ihnen fest gewähltes θ Stichproben x_1, \dots, x_n und berechnen Sie $z = \bar{x}_n$ sowie $w = (\bar{x}_n)^2$. Wiederholen Sie den Vorgang $R = 100000$ mal, plotten Sie Histogramme und berechnen Sie den Mittelwert der so erhaltenen Werte $(z_i)_{i=1}^R$ bzw. $(w_i)_{i=1}^R$ - was ist zu beobachten?

Übungsaufgabe 4. Sei $X \sim \mathcal{U}(-a, a)$. Berechnen Sie sowohl mittels Maximum Likelihood Methode als auch mittels Momentenmethode Schätzer von a . Sind die erhaltenen Schätzer erwartungstreu? Sind sie (stark) konsistent?

Übungsaufgabe 5. Beweisen Sie Satz 1.15.

Übungsaufgabe 6. Eine consulting Firma sucht neue Mitarbeiter mit Universitätsabschluss. Die Einstellungskriterien inkludieren eine Punktezahl von mindestens 120 bei einem (in der Firma zu absolvierenden) IQ-Test, wobei der IQ als $\mathcal{N}(\theta, 5^2)$ -verteilt mit unbekanntem θ angenommen wird. Von 500 Bewerbern schaffen nur 25 den Test - schätzen Sie θ . Überprüfen Sie Güte des erhaltenen Schätzers mit Hilfe von Simulationen in R.