3. Übung am 8. April 2024

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik oder das Angewandte Statistik Skriptum.

Übungsaufgabe 12 (Verallgemeinerung von Aufgabe 6)**.** Eine consulting Firma sucht neue Mitarbeiter mit Universitätsabschluss. Die Einstellungskriterien inkludieren eine Punktezahl von mindestens 120 bei einem (in der Firma zu absolvierenden) IQ-Test, wobei der IQ als $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$-verteilt mit unbekanntem θ und $\sigma > 0$ angenommen wird. Von 5000 Bewerbern schaffen 630 den Test, 4000 haben ein Testergebnis von mindestens 100. Schätzen Sie θ und σ. Überprüfen Sie Güte der erhaltenen Schätzers mit Hilfe von Simulationen in R.

Übungsaufgabe 13. Konstruieren Sie (i) eine diskrete und (ii) eine absolut stetige Zufallsvariable X, die $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}^{T \circ X}$ mit $T(x) = \frac{1}{x}$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllt.

Übungsaufgabe 14. Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilter Zufallsvariable; $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ bezeichne die Stichprobenvarianz. Für jedes $n \geq 2$ sei die Zufallsvariable T_n definiert durch

$$T_n = \sqrt{n}\, \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}.$$

Beweisen Sie, dass T_n (für $n \to \infty$) schwach gegen $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ konvergiert und illustrieren Sie das Resultat mittels Simulationen in R.
Hinweis: Lesen Sie den Satz von Slutzky auf Wikipedia (English Version!) und wenden Sie ihn dann auf obige Situation an.

Übungsaufgabe 15. Wir werden kommende Woche eine auf den ersten Blick sehr überraschende Eigenschaft der Normalverteilung kennenlernen: Für eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sind das Stichprobenmittel $\overline{X}_n$ und die Stichprobenvarianz S_n^2 unabhängig. Zeigen Sie die Existenz einer Verteilung F mit $\mathbb{V}(X) > 0$ für $X \sim F$ und folgender Eigenschaft: für eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ von $X \sim F$ ist S_n^2 sogar eine Funktion von $\overline{X}_n$.

Übungsaufgabe 16. Sei $X = (X_1, X_2, \ldots X_d)$ multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^d$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Weiters sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär. Beweisen Sie, dass $Y = AX$ ebenfalls multivariat normalverteilt ist und berechnen Sie Mittelwert und Kovarianzmatrix. Welche spezielle Eigenschaft hat Y für den Fall, dass A sogar orthogonal ist? Illustrieren Sie das Resultat in Dimension $d = 2$ mit Hilfe von Simulationen in R (zur Erzeugung von Stichproben der multivariaten Normalverteilung kann die Funktion 'mvrnorm' verwendet werden).

Übungsaufgabe 17. X, Y seinen Zufallsvariable, A, B Borelmengen, und es gelte

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in B) = \alpha$$

für ein $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$2\alpha - 1 \leq \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \leq \alpha$$

und konstruieren Sie dann Beispiele, die zeigen, dass sowohl die linke als auch die rechte Ungleichung (wenn auch nicht simultan) zu Gleichungen werden können.