3. Übung am 17. April 2018

UV Angewandte Statistik (405.330), Ass.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 11 Seien X absolut stetig mit Dichte $f_{a,b}(x) = ae^{-a(x-b)}\mathbf{1}_{[b,\infty)}$, wobei $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt. Berechnen Sie den MLE $\hat{\theta}_n = (\hat{\theta}_n^1, \hat{\theta}_n^2)$ für (a, b). Welche Eigenschaften (Konsistenz, Erwartungstreue, Effizienz, etc.) haben $\hat{\theta}_n^1$ und $\hat{\theta}_n^2$?

Übungsaufgabe 12 Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit $n \geq 2$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion F. $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$ bezeichnen den ersten und den letzten Wert der Ordnungsstatistik gemäss Aufgabe 2.
(i) Berechnen Sie die (zweidimensionale) Verteilungsfunktion $H_{1,n}$ des Vektors $(X_{(1)}, X_{(n)})$, i.e.

$$H_{1,n}(x, y) = \mathbb{P}\big(X_{(1)} \leq x, X_{(n)} \leq y\big).$$

(ii) Berechnen Sie die Dichte $h_{1,n}$ von $(X_{(1)}, X_{(n)})$ unter der Annahme, dass F absolut stetig mit Dichte f ist.

Übungsaufgabe 13 (R) Sei $X \sim \mathcal{U}(0, \theta)$. Berechnen Sie den Momentenschätzer $\hat{\theta}_n$ von θ. Ist $\hat{\theta}_n$ erwartungstreu und/oder stark konsistent? Ist $\hat{\theta}_n$ asymptotisch normalverteilt?
Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mittels Simulationen in R.

Übungsaufgabe 14 (R) Sei $X \sim \mathcal{U}(-\theta, \theta)$. Berechnen Sie basierend auf der Momentenmethode einen Schätzer $\hat{\theta}_n$ von θ. Ist $\hat{\theta}_n$ erwartungstreu und/oder stark konsistent? Ist $\hat{\theta}_n$ asymptotisch normalverteilt?
Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mittels Simulationen in R.

Übungsaufgabe 15 (R) Sei $X \sim f_\theta(x) = (\theta + 1)x^\theta\, \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ gemäss Beispiel 2.10.
Betrachten Sie ein $\theta \in (-1, \infty)$ und ein $n \geq 20$ Ihrer Wahl, überlegen Sie sich, wie Stichproben $x_1, \ldots, x_n$ von X in R generieren können und berechnen Sie dann den Schätzer $\hat{\theta}_n$ aus Beispiel 2.10. Wiederholen Sie diese Schritte $R = 10.000$ mal und plotten Sie ein Histogramm der Schätzwerte.