5. Übung am 21. April 2020

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 25. Sei F eine stetige Verteilungsfunktion und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe von $X \sim F$. $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ bezeichne die Ordnungsstatistik. Bestimmen Sie das kleinstmögliche $n \in \mathbb{N}$ sodass

$$\mathbb{P}(X_{(1)} < F^{-}(0.5) < X_{(n)}) \geq 0.95$$

gilt und überprüfen Sie Ihr Resultat für ein von Ihnen gewähltes F mittels Simulationen in R. Welche Bedeutung hat das Resultat hinsichtlich der Konstruktion eines Konfidenzintervalls?

Übungsaufgabe 26. Angenommen X ist quadratisch integrierbar. Aus der VO Mathematische Statistik wissen wir, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ die Abbildung $a \mapsto \|X - a\|_2^2 = \mathbb{E}(X-a)^2$ minimiert. Welche Größe minimiert die Abbildung $a \mapsto \|X - a\|_1 = \mathbb{E}|X - a|$?

Übungsaufgabe 27. Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilter Zufallsvariable; $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ bezeichne die Stichprobenvarianz. Für jedes $n \geq 2$ sei die Zufallsvariable T_n definiert durch

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}.$$

Beweisen Sie, dass T_n (für $n \to \infty$) schwach gegen $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ konvergiert und illustrieren Sie das Resultat mittels Simulationen in R. Hinweis: Satz von Slutzky verwenden.
Zusatz: Gilt das Resultat auch ohne Annahme der Normalverteilung?

Übungsaufgabe 28. Sei $X = (X_1, X_2, \ldots X_d)$ multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^d$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Weiters sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ regulär. Beweisen Sie, dass $Y = AX$ ebenfalls multivariat normalverteilt ist und berechnen Sie Mittelwert und Kovarianzmatrix. Welche spezielle Eigenschaft hat Y für den Fall, dass A sogar orthogonal ist? Illustrieren Sie das Resultat in Dimension $d = 2$ mit Hilfe von Simulationen in R (zur Erzeugung von Stichproben der multivariaten Normalverteilung kann die Funktion 'mvrnorm' verwendet werden).

Übungsaufgabe 29. In der Funktionalanalysis wird schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ meist wie folgt definiert ($C_b(\mathbb{R})$ bezeichne die Menge aller beschränkten, stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$): $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen μ (wir schreiben $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$) genau dann, wenn für jedes $f \in C_b(\mathbb{R})$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu$$

Zeigen Sie: Die beiden Definitionen sind äquivalent, i.e. $F_n \xrightarrow{w} F$ genau dann wenn $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, wobei μ_n das zu F_n gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet (siehe Lemma 4.3 im Statistik Skriptum).