6. Übung am 28. April 2020

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 30. Studieren Sie Abschnitt 4.1 im Skriptum.

Übungsaufgabe 31. Verwenden Sie die PIT (probability integral transform) um ein exaktes Konfidenzinterval C_n für den Parameter θ der Exponentialverteilung herzuleiten.
Hinweis: Für $X \sim Ex(\theta)$ gilt $e^{-\theta X} \sim \mathcal{U}(0,1)$ und damit $2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$.

Übungsaufgabe 32. Angenommen I_1, I_2, I_3 seien exakte Konfidenzintervalle (mit Überdeckungswahrscheinlichkeit $1-\alpha$) für die Parameter $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Wie hoch ist die Überdeckungswahrscheinlichkeit von $C = I_1 \times I_2 \times I_3$ für $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ höchstens, wie hoch ist sie mindestens?

Übungsaufgabe 33. Bezeichne $C_n = [L_n, U_n]$ das in Beispiel 4.12 hergeleitete exakte Konfidenzintervall für den Parameter θ von $\mathcal{U}(0,\theta)$. Beweisen Sie, dass $[\mathbb{P}_\theta]$ die folgenden Gleichheit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \theta = \lim_{n\to\infty} U_n$$

Wie lässt sich das Resultat interpretieren?

Übungsaufgabe 34 (Mischverteilung)**.** Sei $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, 1), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, 1)$, und $Z \sim A(p)$ mit $p \in (0,1)$. Die drei Zufallsvariable X_1, X_2, Z seien unabhängig. Wir betrachten die Zufallsvariable

$$Y = ZX_1 + (1-Z)X_2,$$

$Y_1, \ldots, Y_n$ sei eine Zufallsstichprobe von Y. Überlegen Sie Sich, wie sich die Parameter μ_1, μ_2, p ausgehend von $Y_1, \ldots, Y_n$ schätzen lassen, und überprüfen Sie die Güte der Schätzer mit Hilfe von Simulationen in R.