6. Übung am 06. Mai 2024

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik oder das Angewandte Statistik Skriptum.

Übungsaufgabe 28. Angenommen, die Verteilungsfunktionen $F, F_1, F_2, \dots$ sind absolut stetig mit Wahrscheinlichkeitsdichten $f, f_1, f_2, \dots$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| d\lambda(x) = 0.$$

Folgt dann, dass $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen F konvergiert? Wie lautet Ihre Antwort, wenn stattdessen $\lim_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)| = 0$ für λ-fast jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt?

Übungsaufgabe 29. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die erste Aussage des Satzes von Slutzky i.A. nicht gilt, wenn $Y_n \xrightarrow{w} Y$, die Zufallsvariable Y aber nicht konstant $[\mathbb{P}]$ ist. Verifizieren Sie Ihr Beispiel mittels Simulationen in R.

Übungsaufgabe 30. Es gibt mittlerweile zahlreiche Hypothesentests auf Unabhängigkeit von Zufallsvariablen X und Y. Ein relativ neuer Zugang arbeitet mit Copulas und testet nicht nur auf Unabhängigkeit, sondern schätzt auch die Stärke der Abhängigkeit. Gehen Sie die Beschreibung auf http://www.trutschnig.net/software.html bis inkl. Example 2 durch (es reicht, die Grundidee zu verstehen), installieren Sie 'qad' und schätzen Sie dann mittels qad die Abhängigkeit von $\overline{X}_n$ und S_n^2 basierend auf den in Schritt 2 von Aufgabe 27 generierten Daten.

Übungsaufgabe 31 (Fortsetzung Flaschenpfand)**.** Versuchen Sie, $\mathbb{E}(D)$ ohne dem Wissen, dass die Zeit D zwischen Kauf und Rückgabe geometrisch verteilt ist, zu schätzen. Lassen Sie Ihren Ideen dabei freien Lauf (in der Praxis ist die zugrundeliegende Verteilung a priori so gut wie nie bekannt.

Übungsaufgabe 32. Seien $x \geq 0, t > 0, m \in \mathbb{N}$ und X poissonverteilt mit Parameter mt (wir schreiben $X \sim \text{Pois}(mt)$). Berechnen Sie

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(X \leq mx\right).$$

Hinweis: Nach dem Additionstheorem der Poisson-Verteilung existieren für jedes $m \in \mathbb{N}$ unabhängige Pois(t)-verteilte Zufallsvariable $X_1, \dots, X_m$ mit $\sum_{i=1}^m X_i = X$, obiger Grenzwert lässt sich daher durch geschickte Anwendung des CLTs berechnen.