8. Übung am 05. Juni 2018

UV Angewandte Statistik (405.330), Ass.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 35 Beweisen Sie Satz 4.8.

Übungsaufgabe 36 Bezeichne $C_n = [L_n, U_n]$ das in Beispiel 4.11 hergeleitete exakte Konfidenzintervall für den Parameter θ von $\mathcal{U}(0, \theta)$. Beweisen Sie, dass $[\mathbb{P}_\theta]$ die folgenden Gleichheit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \theta = \lim_{n\to\infty} U_n$$

Wie lässt sich das Resultat interpretieren?
Hinweis: SLLN und Satz 2.17 anwenden.

Übungsaufgabe 37 Gegeben sei eine Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim F$; $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ bezeichne, wie gewohnt, die Ordnungsstatistiken. Gini's mittlere (absolute) Differenz G ist definiert durch

$$G = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} |X_i - X_j|.$$

Zeigen Sie die Existenz von Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ mit

$$G = \sum_{l=1}^{n} a_l X_{(l)}.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich die Darstellung zuerst für den Fall $n = 3, 4$ und schließen Sie dann auf den allgemeinen Fall.

Übungsaufgabe 38 (Fortsetzung von 37) Berechnen Sie für den Fall, dass die Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ kommt, den Erwartungswert $\mathbb{E}(G)$, und überprüfen Sie Ihr Resultat mittels Simulationen in R.

Übungsaufgabe 39 $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, C_n bezeichne das in Satz 4.5 angegebene, exakte Konfidenzintervall für μ. Ausgehend von der Stichprobe möchten wir überprüfen, ob $\mu = 0$ ist, und gehen wie folgt vor: Wenn $0 \notin C_n(x_1, \ldots, x_n)$, dann verwerfen wir die Hypothese, andernfalls nicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, die Hypothese zu verwerfen obwohl sie richtig ist?