9. Übung am 26. Mai 2020

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 45. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entwickeln Sie einen exakten, auf der χ^2-Verteilungen beruhenden Hypothesentest für $H_0 : \sigma = \sigma_0$ versus $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$. Arbeiten Sie mit Simulationen, um zu überprüfen, ob der Test das Signifikanzniveau α einhält und um die Form der power-Funktion zu skizzieren.

Übungsaufgabe 46. Verwenden Sie Satz 4.7 um einen exakten Hypothesentest für die Gleichheit der Mittelwerte zweier normalverteilter (unabhängiger) Populationen (mit gleicher Varianz) herzuleiten. Überprüfen Sie die Güte (i.e. Fehler erster und zweiter Art) des Tests mittels Simulationen.

Übungsaufgabe 47. Verwenden Sie Satz 4.20 um ausgehend von einer Stichprobe $X_1, \ldots, X_n \sim F$ (mit F stetig) einen Test für $H_0 : F = F_0$ versus $H_1 : F \neq F_0$ herzuleiten. Wie kann die Power dieses Tests mittels Simulationen überprüft werden?

Übungsaufgabe 48. $X_1, \ldots X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, die Teststatistik T_n sei definiert durch $T_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}}$. Wir verwerfen $H_0 : \mu = \mu_0$ auf dem Niveau $\alpha \in [0, 1]$ genau dann, wenn $T_n \in V_\alpha := (-\infty, -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $\hat{q}_n$, definiert durch

$$\hat{q}_n(\omega) = \inf\big\{\alpha \in [0, 1] : T_n(\omega) \in V_\alpha\big\} \qquad (\inf(\emptyset) := 0)$$

Übungsaufgabe 49. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, die Zufallsvariable T_n sei definiert durch $T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}$. Weiters gelte $Y \sim t_{n-1}$ und F_Y bezeichne die Verteilungsfunktion von Y. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $\hat{p}$, definiert durch

$$\hat{p}(\omega) = \mathbb{P}\big(|Y| \geq |T_n(\omega)|\big) = 2(1 - F_Y(|T_n(\omega)|)).$$

NB: $\hat{p}(\omega)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine t_{n-1}-verteilte Zufallsvariable einen (vom Absolutbetrag her) mindestens so großen Wert wie $T_n(\omega)$ annimmt. Welche in Abschnitt 5 im Skriptum getätigte Aussage verifiziert diese Übungsaufgabe?