10. Übung am 19. Juni 2018

UV Angewandte Statistik (405.330), Ass.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 45 $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entwickeln Sie einen (exakten, auf der χ^2-Verteilungen beruhenden) Hypothesentest für $H_0 : \sigma = \sigma_0$ versus $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$. Arbeiten Sie mit Simulationen, um zu überprüfen, ob der Test das Signifikanzniveau α einhält und um die Form der power-Funktion zu skizzieren (orientieren Sie sich für letzteres an den Zeilen 65-81 in R-Codes_applied_stats10.R).

Übungsaufgabe 46 $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim Ex(\theta)$. Entwickeln Sie einen (exakten, auf der χ^2-Verteilungen beruhenden) Hypothesentest für $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Arbeiten Sie mit Simulationen, um zu überprüfen, ob der Test das Signifikanzniveau α einhält und um die Form der power-Funktion zu skizzieren.

Übungsaufgabe 47 Verwenden Sie Satz 4.7 um einen exakten Hypothesentest für die Gleichheit der Mittelwerte zweier normalverteilter (unabhängiger) Populationen (mit gleicher Varianz) herzuleiten. Überprüfen Sie die Güte (i.e. Fehler erster und zweiter Art) des Tests mittels Simulationen.

Übungsaufgabe 48 Seien F_0, F stetige (eindimensionale) Verteilungsfunktionen. Verwenden Sie Übungsaufgabe 42 um, ausgehend von einer Stichprobe $X_1, \ldots, X_n \sim F$, einen Test für $H_0 : F = F_0$ versus $H_1 : F \neq F_0$ herzuleiten.

Übungsaufgabe 49 $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, die Zufallsvariable T_n sei definiert durch $T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}$. Weiters gelte $Y \sim t_{n-1}$ und F_Y bezeichne die Verteilungsfunktion von Y. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $\hat{p}$, definiert durch

$$\hat{p}(\omega) = \mathbb{P}\big(|Y| \geq |T_n(\omega)|\big) = 2(1 - F_Y(|T_n(\omega)|)).$$

NB: $\hat{p}(\omega)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine t_{n-1}-verteilte Zufallsvariable einen (vom Absolutbetrag her) mindestens so großen Wert wie $T_n(\omega)$ annimmt.