11. Übung am 17. Juni 2024

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik oder das Angewandte Statistik Skriptum.

Übungsaufgabe 53. Finden Sie heraus, was die Funktion `power.t.test` macht und lösen Sie damit abermals Übungsaufgabe 46. Um wie viel muss n vergrößert werden, wenn die Varianz verdoppelt/verdreifacht wird?

Übungsaufgabe 54. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, die Zufallsvariable T_n sei definiert durch $T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}$. Weiters gelte $Y \sim t_{n-1}$ und F_Y bezeichne die Verteilungsfunktion von Y. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $\hat{p}$, definiert durch

$$\hat{p}(\omega) = \mathbb{P}\big(|Y| \geq |T_n(\omega)|\big) = 2(1 - F_Y(|T_n(\omega)|)).$$

NB: $\hat{p}(\omega)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine t_{n-1}-verteilte Zufallsvariable einen (vom Absolutbetrag her) mindestens so großen Wert wie $T_n(\omega)$ annimmt. Welche in Abschnitt 5 im Skriptum getätigte Aussage verifiziert diese Übungsaufgabe?

Definition 7.1. Wir betrachten wie bisher $\emptyset \neq \Theta_0 \subset \Theta$ und eine Stichprobe $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ von $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Mit $\mathcal{X} := Rg(X)^n$ bezeichnen wir den Stichprobenraum. Weiters sei $\mathcal{G}$ eine endliche Gruppe von Transformationen $g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Wir sagen, dass *unter H_0 die Randomisierungseigenschaft* gilt, genau dann, wenn für jedes $X \sim P_\theta$ mit $\theta \in \Theta_0$, jede Stichprobe $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ von X, und jedes $g \in \mathcal{G}$ gilt: $\mathbf{X}$ und $g \circ \mathbf{X}$ haben die selbe Verteilung.

Übungsaufgabe 55. Sei $(X_1, \ldots, X_m)$ eine Stichprobe von $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ eine dazu unabhängige Stichprobe von $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, und gelte $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Wir setzen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{m+n}$ und $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)$. Für jede Permutation π von $\{1, \ldots, m+n\}$ sei $g_\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ definiert durch

$$g_\pi(z_1, \ldots, z_{m+n}) = (z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(m+n)}),$$

$\mathcal{G}$ bezeichne die Gruppe all dieser Transformationen. Zeigen Sie, dass in diesem Setting die Randomisierungseigenschaft gilt.

Übungsaufgabe 56. Wir betrachten das Setting von Definition 7.1 und schreiben $M := \#G$ für die Kardinalität von G. Zusätzlich sei T eine beliebige Teststatistik, für jede Stichprobe $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ bezeichne $T_{(1)}(\mathbf{x}) \leq T_{(2)}(\mathbf{x}) \leq \cdots \leq T_{(n)}(\mathbf{x})$ die Ordnungsstatistik der Werte $\{T \circ g(\mathbf{x}) : g \in \mathcal{G}\}$. Für jedes $\alpha \in (0,1)$ setzen wir $k := M - \lfloor M\alpha \rfloor$ sowie

$$\begin{aligned} M^0(\mathbf{x}) &= \#\Big\{j \in \{1, \ldots, M\} : T_{(j)}(\mathbf{x}) = T_{(k)}(\mathbf{x})\Big\} \\ M^+(\mathbf{x}) &= \#\Big\{j \in \{1, \ldots, M\} : T_{(j)}(\mathbf{x}) > T_{(k)}(\mathbf{x})\Big\}, \end{aligned}$$

und definieren einen ‘drei’-wertigen Test φ durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } T(\mathbf{x}) > T_{(k)}(\mathbf{x}), \\ \frac{M\alpha - M^+(\mathbf{x})}{M^0(\mathbf{x})} & \text{if } T(\mathbf{x}) = T_{(k)}(\mathbf{x}), \\ 0 & \text{if } T(\mathbf{x}) < T_{(k)}(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass dann für jedes $\theta \in \Theta_0$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\mathbb{E}_\theta(\varphi \circ \mathbf{X}) = \alpha.$$

Übungsaufgabe 57. Die Zufallsvariable U und V seinen unabhängig und stetig gleichverteilt auf $[0,1]$. Berechnen Sie die Verteilung des Zufallsvektors (X, Y) gegeben durch

$$X = \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V), \quad Y = \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V).$$

Hinweis: Ein Scatterplot von Stichproben von (X, Y) zeigt sofort, auf welche Verteilung es hinausläuft.