

10. Übung am 21. Juni 2021

UV Angewandte Statistik (405.170)

Link Ankreuzliste: siehe www.truttschnig.net/courses

Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 52. Wählen Sie einen der im Rahmen der UV diskutierten Hypothesentests und approximieren Sie die Verteilungsfunktion des entsprechenden p-Werts mittels Simulationen in R.

Definition 6.2. Wir betrachten wie bisher $\emptyset \neq \Theta_0 \subset \Theta$ und eine Stichprobe $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ von $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Mit $\mathcal{X} := Rg(X)^n$ bezeichnen wir den Stichprobenraum. Weiters sei \mathcal{G} eine endliche Gruppe von Transformationen $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Wir sagen, dass *unter H_0 die Randomisierungseigenschaft* gilt, genau dann, wenn für jedes $X \sim P_\theta$ mit $\theta \in \Theta_0$, jede Stichprobe $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ von X , und jedes $g \in \mathcal{G}$ gilt: \mathbf{X} und $g \circ \mathbf{X}$ haben die selbe Verteilung.

Übungsaufgabe 53. Sei (X_1, \dots, X_m) eine Stichprobe von $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$, (Y_1, \dots, Y_n) eine Stichprobe von $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, und gelte $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Wir setzen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{m+n}$ und $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$. Für jede Permutation π von $\{1, \dots, m+n\}$ sei $g_\pi : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ definiert durch

$$g_\pi(z_1, \dots, z_{m+n}) = (z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(m+n)}),$$

\mathcal{G} bezeichne die Gruppe all dieser Transformationen. Zeigen Sie, dass in diesem Setting die Randomisierungseigenschaft gilt.

Übungsaufgabe 54. Wir betrachten das Setting von Definition 6.2 und schreiben $M := \#G$ für die Kardinalität von G . Zusätzlich sei T eine beliebige Teststatistik, für jede Stichprobe $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ bezeichne $T_{(1)}(\mathbf{x}) \leq T_{(2)}(\mathbf{x}) \leq \dots \leq T_{(n)}(\mathbf{x})$ die Ordnungsstatistik der Werte $\{T \circ g(\mathbf{x}) : g \in \mathcal{G}\}$. Für jedes $\alpha \in (0, 1)$ setzen wir $k := M - \lfloor M\alpha \rfloor$ sowie

$$\begin{aligned} M^0(\mathbf{x}) &= \#\{j \in \{1, \dots, M\} : T_{(j)}(\mathbf{x}) = T_{(k)}(\mathbf{x})\} \\ M^+(\mathbf{x}) &= \#\{j \in \{1, \dots, M\} : T_{(j)}(\mathbf{x}) > T_{(k)}(\mathbf{x})\}, \end{aligned}$$

und definieren einen 'drei'-wertigen Test φ durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } T(\mathbf{x}) > T_{(k)}(\mathbf{x}), \\ \frac{M\alpha - M^+(\mathbf{x})}{M^0(\mathbf{x})} & \text{if } T(\mathbf{x}) = T_{(k)}(\mathbf{x}), \\ 0 & \text{if } T(\mathbf{x}) < T_{(k)}(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass dann für jedes $\theta \in \Theta_0$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\mathbb{E}_\theta(\varphi \circ \mathbf{X}) = \alpha.$$