

## 11. Übung am 18. Juni 2019

**UV Angewandte Statistik (405.170), Assoz.Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig**

Link Ankreuzliste: siehe [www.trutschnig.net/courses](http://www.trutschnig.net/courses)

Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit \* versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

**Übungsaufgabe 51**  $X_1, \dots, X_n$  sei eine Stichprobe von  $X \sim A(p)$ . Entwickeln Sie für den Fall  $n = 100$  einen Hypothesentest für  $H_0 : p \leq \frac{1}{4}$  vs.  $H_1 : p > \frac{1}{4}$  dessen Fehler erster Art<sup>†</sup> möglichst nahe bei 0.05 liegt, in dem Sie analog zum zweiten Teil des Toy Examples in den Folien (Seiten 10-11) vorgehen. Arbeiten Sie mit Simulationen, um zu überprüfen, ob der Test das Signifikanzniveau  $\alpha$  einhält und um die Form der power-Funktion zu skizzieren.

**Übungsaufgabe 52**  $X_1, \dots, X_n$  sei eine Stichprobe von  $X$  mit  $\sigma^2 = \mathbb{V}(X) < \infty$  und  $\mu = \mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$  (beide Parameter unbekannt). Um  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  vs.  $H_1 : \mu > \mu_0$  für grosses  $n$  auf Signifikanzniveau  $\alpha$  zu testen, schägt Erika Musterfrau das folgende Kriterium vor: Verwerfe  $H_0$  genau dann, wenn  $Y_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$  gilt. Ist dies ein asymptotisch exakter Test? Skizzieren Sie mit Hilfe von Simulationen die power-Funktion des Tests.

**Übungsaufgabe 53**  $X_1, \dots, X_n$  sei eine Stichprobe von  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , die Zufallsvariable (Teststatistik)  $T_n$  sei definiert durch  $T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}}$ . Wir verwerfen  $H_0 : \mu = \mu_0$  auf dem Niveau  $\alpha \in [0, 1]$  genau dann, wenn  $T_n \in V_\alpha := (-\infty, -t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ . Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariable  $\hat{q}_n$ , definiert durch

$$\hat{q}_n = \inf \{ \alpha \in [0, 1] : T_n(\omega) \in V_\alpha \} \quad (\inf(\emptyset) := 0)$$

**Übungsaufgabe 54** Max Mustermann schlägt den folgenden Test auf Normalverteilung vor: Ausgehend von einer Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  von  $X \sim F$  setzen wir  $\mu_0 = \bar{X}_n$  und  $\sigma_0 = \sqrt{S_n^2}$  und testen dann (mittels Aufgabe 43 oder mittels Aufgabe 48)  $H_0 : F = F_{\mu_0, \sigma_0^2}$ , wobei  $F_{\mu_0, \sigma_0^2}$  die Verteilungsfunktion von  $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$  bezeichnet. Überprüfen Sie mittels Simulationen, dass der resultierende Test für kleine Sample Sizes ( $n = 10, 20, 30$ ) sehr geringe Power hat, überlegen Sie sich, warum dem so ist, und warum das für Fans von  $t$ -tests keine gute Nachricht ist.

**Übungsaufgabe 55** Die Zeilen 01-46 in R-Codes `applied_stats11.R` implementieren einen auf den ersten Blick etwas ungewöhnlichen Hypothesentest. Finden Sie heraus, was der R-Code macht, und berechnen Sie approximativ die power-Funktion des Tests. Vergleichen Sie die Powerfunktion mit jener des entsprechenden  $t$ -tests. Adaptieren Sie weiters den Code so, dass im Falle zweier Exponentialverteilung auf Gleichheit der Parameter getestet wird, und berechnen Sie approximativ den Fehler erster Art.

---

<sup>†</sup>Zur Erinnerung:  $\alpha = \sup_{p \leq \frac{1}{4}} \mathbb{P}_p(\text{Verwerfe } H_0)$