02. Übung am 09. April 2018

[LVA 405.552 UV Abhängigkeitsmodellierung, Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 7 Beweisen Sie Satz 1.10.

Übungsaufgabe 8 Berechnen Sie für $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, $X(\omega) = \omega^2$ und $\mathcal{C} = \mathcal{A}_\sigma(\{[0,1/4], (1/4,3/4], (3/4,1]\})$ die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(X|\mathcal{C})$ von X unter $\mathcal{C}$.

Übungsaufgabe 9 Beweisen Sie mindestens zwei der Aussagen 4-9 in Satz 1.16.

Übungsaufgabe 10 Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathbb{P})$, wobei $\mathbb{P} = \mu \otimes \mu^\dagger$ und μ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bezeichne. Die Familie $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^2)$ aller symmetrischen Borelmengen ist definiert durch†

$$\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^2) = \big\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) : B^t = B\big\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^2)$ eine σ-Algebra ist, und berechnen Sie für eine beliebige (integrierbare) Zufallsvariable $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^2))$ von X unter $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^2)$.

Übungsaufgabe 11 Seien $X_1, X_2, \ldots X_n$ i.i.d. und integrierbar und S_n definiert durch $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X_1|S_n) := \mathbb{E}(X_1|\mathcal{A}_\sigma(S_n))$.†

Übungsaufgabe 12 (elementar aber wichtig) Seien X und Y Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

1. Y ist $\mathcal{A}_\sigma(X)$ messbar.
2. Es existiert eine (Borel) messbare Transformation $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $Y = h \circ X$.

Zusatz: Ist Y nicht-negativ, dann kann auch h nicht-negativ gewählt werden. Warum ist dieses einfache Resultat beispielsweise nützlich für Aufgabe 11?

$^\dagger\mathbb{P}$ ist also das Produktmaß von μ mit sich selbst

$^\dagger B^t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y,x) \in B\}$

†Wie gewohnt, bezeichnet $\mathcal{A}_\sigma(Z) = Z^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die von Z erzeugte σ-Algebra.