03. Übung am 16. April 2018

[LVA 405.552 UV Abhängigkeitsmodellierung, Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 13 Zeigen Sie den in Beispiel 1.22 behaupteten bijektiven Zusammenhang zwischen Markov Kernen und stochastischen Matrizen (Aufwärmübung).

Übungsaufgabe 14 Beweisen Sie Lemma 1.27 (Aufwärmübung).

Übungsaufgabe 15 Sei (X, Y) absolut stetig mit Dichte

$$f(x,y) = \big(1 + \theta(1-2x)(1-2y)\big)\mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y),$$

wobei $\theta \in [-1,1]$. Berechnen Sie eine reguläre bedingte Verteilung $K_{Y,X}$ von Y unter X.

Übungsaufgabe 16 Sei $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ und $Y = T \circ X$ mit

$$T(x) = 2x\mathbf{1}_{[0,1/2]}(x) + 2(1-x)\mathbf{1}_{(1/2,1]}(x).$$

Berechnen Sie eine reguläre bedingte Verteilung $K_{Y,X}$ von Y unter X.

Übungsaufgabe 17 Seien X, Y integrierbare Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Eine (Borel-) messbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Version der bedingten Erwartung von Y gegeben X, genau dann wenn $\mathbb{E}(Y|X)(\omega) = g \circ X(\omega)$ für $\mathbb{P}$-fast-jedes $\omega \in \Omega$ gilt.
Beweisen Sie, dass g genau dann eine Version der bedingten Erwartung von Y gegeben X ist, wenn die folgenden Gleichheit für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\int_B g(x)\, d\mathbb{P}^X(x) = \int_{X^{-1}(B)} Y\, d\mathbb{P}$$

Übungsaufgabe 18 Seien die Voraussetzungen des zweiten Teils von Definition 1.25 erfüllt und K eine reguläre bedingte Erwartung von Y unter $\mathcal{C} = \mathcal{A}_\sigma(X)$. Wie kann aus K eine reguläre bedingte Erwartung $K_{Y,X}$ von Y unter X konstruiert werden?