

04. Übung am 23. April 2018

[LVA 405.552 UV Abhängigkeitsmodellierung, Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 19 (Fortsetzung von Aufgabe 16) Sei $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und $Y = T \circ X$ mit

$$T(x) = 2x\mathbf{1}_{[0, 1/2]}(x) + 2(1-x)\mathbf{1}_{(1/2, 1]}(x).$$

Wir setzen $\mu = \mathbb{P}^{(X, Y)}$ sowie $\Gamma(T) := \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y = T(x)\}$. Welche Verteilung hat Y ? Berechnen Sie weiters (mittels Disintegration oder direkt) $\mu(\Gamma(T))$ und $\mu([0, x] \times [0, y])$.

Übungsaufgabe 20 Sei (X, Y) stetig gleichverteilt am Einheitskreis $B(0, 1)$. Die Zufallsvariablen R und Φ seien definiert durch

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \Phi = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Berechnen Sie eine reguläre bedingte Verteilung von Φ unter R sowie eine reguläre bedingte Verteilung von R unter Φ .

Übungsaufgabe 21 Beweisen Sie Satz 1.31.

Übungsaufgabe 22 Sei (X, Y) absolut stetig mit Dichte f . Konstruieren Sie eine reguläre bedingte Verteilung $K(\cdot, \cdot)$ von Y unter X , die ausschließlich von f und der Randdichte f_1 von X abhängt.

Übungsaufgabe 23 X und Y seien stetig gleichverteilt auf $[0, 1]$, A bezeichne die Verteilungsfunktion von (X, Y) , $K(\cdot, \cdot)$ bezeichne eine reguläre bedingte Verteilung von Y unter X . Überlegen Sie sich, wie $K(\cdot, \cdot)$ aus A bestimmt werden kann.

Hinweis: Nehmen Sie vereinfachend an, dass die Abbildung $(x, y) \mapsto \frac{\partial A}{\partial x}(x, y)$ stetig ist.