08. Übung am 28. Mai 2018

[LVA 405.552 UV Abhängigkeitsmodellierung, Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 42 Beweisen Sie, dass für jede Copula $A \in \mathcal{C}$ die folgende Ungleichung auf ganz $[0,1]^2$ gilt: $W(x,y) \leq A(x,y) \leq M(x,y)$ (Aufwärmübung).

Übungsaufgabe 43 Sei A eine Copula. Angenommen, das entsprechende doppelt stochastische Maß μ_A ist absolut stetig (bezüglich λ_2) mit Dichte f. Welche Eigenschaften (zusätzlich zu $f \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda_2 = 1$) erfüllt f? (Aufwärmübung)

Übungsaufgabe 44 Seien $f, f_1, f_2, \ldots [0,1]^2 \to [0,\infty)$ Dichten der absolut stetigen Copulas $A, A_1, A_2, \ldots$[†] und es gelte $\lim_{n\to\infty} f_n = f\ [\lambda_2]$. Folgt dann auch $\lim_{n\to\infty} D_1(A_n, A) = 0$ bzw. $\lim_{n\to\infty} d_\infty(A_n, A) = 0$?
Freiwilliger Zusatz*: Bleiben die Resultate erhalten, wenn die Dichten stattdessen im L^1 konvergieren?

Übungsaufgabe 45 Sei $N \in \mathbb{N}$ und die Quadrate $R_{i,j}^N \subseteq [0,1]^2$ für $i,j \in \{1,\ldots,N\}$ definiert durch

$$R_{i,j}^N = \Big[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\Big] \times \Big[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\Big].$$

Eine Copula A heißt *Checkerboard Copula*, wenn sie absolut stetig ist und ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass die Dichte k_A von A konstant auf dem Inneren $int(R_{i,j}^N)$ jedes Quadrats $R_{i,j}^N$ ist.
Beweisen Sie, dass die Menge aller Checkerboard Copulas dicht in $(\mathcal{C}, D_1)$ ist.
Hinweis: Definieren Sie für $A \in \mathcal{C}$ die Dichte k_{B_n} der Checkerboard Approximation B_n von A durch

$$k_n(x,y) = N^2 \sum_{i,j=1}^{N} \mu_A(R_{i,j}^N) \mathbf{1}_{int(R_{i,j}^N)}(x,y)$$

Übungsaufgabe 46 Arbeiten Sie mit Checkerboards um zu zeigen, dass $(\mathcal{C}, D_1)$ separabel ist.

Übungsaufgabe 47 Ein Punkt x einer konvexen, kompakten Menge F heißt Extremalpunkt, genau dann, wenn er nicht Mittelpunkt zweier von x verschiedener Punkte $y, z \in F$ ist.
Beweisen Sie, dass jede vollständig abhängige Copula A_h Extremalpunkt in $\mathcal{C}$ ist und schließen Sie daraus, dass in $(\mathcal{C}, d_\infty)$ die Extremalpunkte dicht liegen.

[†] sauberer formuliert: die Dichten der entsprechenden doppelt stochastischen Maße $\mu_A, \mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \ldots$