

09. Übung am 04. Juni 2018

[LVA 405.552 UV Abhängigkeitsmodellierung, Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 48 Beweisen Sie, dass für jede Copula $A \in \mathcal{C}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ die (im Beweis von Lemma 3.3 für den Spezialfall $n = 1$ verwendete) Gleichheit

$$\int_{[0,1]^2} u^n d\mu_A(u, v) = \int_{[0,1]^2} v^n d\mu_A(u, v) = \frac{1}{n+1}$$

gilt.

Übungsaufgabe 49 Beweisen Sie, dass Kendall's τ die ersten drei Eigenschaften eines Konkordanzmaßes gemäß Definition 3.6 erfüllt.

Hinweis: Arbeiten Sie - je nachdem, was für die konkrete Eigenschaft handlicher ist - mit (X, Y) oder gleich direkt mit der zugrunde liegenden Copula A und Gleichung 3.3.

Übungsaufgabe 50 Beweisen Sie, dass Kendall's τ die letzten drei Eigenschaften eines Konkordanzmaßes gemäß Definition 3.6 erfüllt.

Hinweis: Arbeiten Sie - je nachdem, was für die konkrete Eigenschaft handlicher ist - mit (X, Y) oder gleich direkt mit der zugrunde liegenden Copula A und Gleichung 3.3.

Zusatz*: Gilt auch die folgende, stärkere Aussage? Sei $((X_n, Y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Paaren stetiger Zufallsvariable, die schwach gegen das ebenfalls stetige Paar (X, Y) konvergiert. Dann folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{X_n, Y_n} = \kappa_{X, Y}$.

Übungsaufgabe 51 Für jedes $z \in [0, 1]$ bezeichne R_z die λ -treue Rotation um z , i.e. $R_z(x) = x + z \pmod{1}$ für jedes $x \in [0, 1]$. $A_z \in \mathcal{C}_d$ bezeichne die entsprechende vollständig abhängige Copula. Berechnen Sie

$$\min_{y, z \in [0, 1]} \int_{[0, 1]^2} A_z d\mu_{A_y}.$$

Übungsaufgabe 52 Konstruieren Sie zwei Copulas A, B mit den folgenden Eigenschaften und erklären Sie, warum dieses Beispiel in Bezug auf die Konkordanz wichtig ist:

1. $A \leq B$ punktweise auf ganz $[0, 1]^2$ und $A(x, y) < B(x, y)$ für ein $(x, y) \in [0, 1]^2$.
2. $\tau(A) = \tau(B)$.

Hinweis: Es reicht, mit (geraden und ungeraden) Shuffles bestehend aus 2 Segmenten zu arbeiten.

Übungsaufgabe 53 (*) Beweisen Sie Satz 3.9.