

1. Übung am 09. Oktober 2017

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.truttschnig.net/courses mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 1 Berechnen Sie $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ für die folgenden Mengenfolgen in \mathbb{R} :

a) $A_n = [0, 1]$ falls n gerade und $A_n = [1, 2]$ falls n ungerade.

b) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : (x - \frac{(-1)^n}{n})^2 \leq 1\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Sind die Mengenfolgen konvergent ?

Übungsaufgabe 2 Bestimmen Sie $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ für die folgenden Erzeuger \mathcal{E} und Grundgesamtheiten Ω :

a) $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$

b) $\Omega = \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$, $\mathcal{E} = \{\{q_i\} : i \in \mathbb{N}\}$

c)* $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \{[-a, a] : a \in [0, \infty)\}$

Übungsaufgabe 3 Weisen Sie für zumindest zwei der 10 verbleibenden Mengensysteme in Lemma 1.14 nach, dass sie Erzeuger der Borel'sche σ -Algebra sind. Orientieren Sie sich dabei an den im Skriptum enthaltenen Beweisen für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 .

Übungsaufgabe 4 Wir betrachten $\Omega_0 = \{1, 2, 3\}$ und setzen

$$\Omega := \Omega_0^{\mathbb{N}} = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3, \dots) : k_i \in \Omega_0\}$$
$$\mathfrak{h} = \{E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \times \Omega_0 \times \Omega_0 \dots : E_i \subseteq \Omega, n \in \mathbb{N}\}.$$

\mathfrak{h} besteht also aus Mengen der Form $\times_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \subseteq \Omega_0$, wobei nur endlich viele E_i ungleich Ω_0 sind. Ist \mathfrak{h} ein Halbring auf Ω ? Gilt $\{\mathbf{k}\} \in \mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{h})$ für jedes $\mathbf{k} \in \Omega$?

Übungsaufgabe 5 Die Voraussetzung, dass \mathfrak{h} ein Halbring ist, ist wesentlich für die Gültigkeit von Satz 1.11: Verwenden Sie folgendes Setup um diese Behauptung zu verifizieren (geeignete Wahl von a und b): $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$, $\mu(\{1\}) = a$, $\mu(\{1, 2\}) = b$.