1. Übung am 15. Oktober 2017

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 1 Berechnen Sie $\liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n$ für die folgenden Mengenfolgen in $\mathbb{R}$:

a) $A_n = [0,1]$ falls n gerade und $A_n = [1,2]$ falls n ungerade.

b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergente Folge und A_n, B_n gegeben durch $A_n = (-\infty, x_n], B_n = [x_n, \infty)$.

Sie die Mengenfolgen konvergent ?

Übungsaufgabe 2 Bestimmen Sie $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ für die folgenden Erzeuger $\mathcal{E}$ und Grundgesamtheiten Ω:

a) $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{E} = \{\{1\},\{1,2\}\}$

b) $\Omega = \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$, $\mathcal{E} = \big\{\{q_i\} : i \in \mathbb{N}\big\}$

c)* $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \big\{[-a,a] : a \in \mathbb{N}_0\big\}$

Übungsaufgabe 3 Weisen Sie für zumindest zwei der 10 verbleibenden Mengensysteme in Lemma 1.14 nach, dass sie Erzeuger der Borel'sche σ-Algebra sind. Orientieren Sie sich dabei an den im Skriptum enthaltenen Beweisen für $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$.

Übungsaufgabe 4 Wir betrachten $\Omega_0 = \{1,2\}$ und setzen

$$\begin{aligned} \Omega &:= \Omega_0^{\mathbb{N}} = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3, \ldots) : k_i \in \Omega_0\} \\ \mathfrak{h} &= \big\{E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \times \Omega_0 \times \Omega_0 \ldots : E_i \subseteq \Omega_0, n \in \mathbb{N}\big\}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{h}$ besteht also aus Mengen der Form $\bigtimes_{i=1}^\infty E_i$ mit $E_i \subseteq \Omega_0$, wobei nur endlich viele E_i ungleich Ω_0 sind. Ist $\mathfrak{h}$ ein Halbring auf Ω? Gilt $\{\mathbf{k}\} \in \mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{h})$ für jedes $\mathbf{k} \in \Omega$? Haben die eben gestellten drei Fragen die gleichen Antworten, wenn Sie $\Omega_0 = \{1, 2, \ldots, N\}$ (für ein festes $N \in \mathbb{N}$) statt $\Omega_0 = \{1,2\}$ betrachten?

Übungsaufgabe 5 Die Voraussetzung, dass $\mathfrak{h}$ ein Halbring ist, ist wesentlich für die Gültigkeit von Satz 1.11: Verwenden Sie folgendes setup um diese Behauptung zu verifizieren (geeignete Wahl von a und b): $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{E} = \{\{1\},\{1,2\}\}$, $\mu(\{1\}) = a$, $\mu(\{1,2\}) = b$.

Übungsaufgabe 6 Zeigen Sie, dass sich jede diskrete Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ in der Form $X(\omega) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$ darstellen lässt, wobei die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und die Mengen $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{n=1}^\infty A_i = \Omega$ sind.