

1. Übung am 11. Oktober 2023

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses mit (*) versehene Aufgaben sind freiwillig und haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad]

Übungsaufgabe 1 (Aufwärmübung) Beweisen Sie die folgenden zwei Aussagen für Mengenfolgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (Ω, \mathcal{A}) :

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{x \in \Omega : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in A_n \text{ für jedes } n \geq n_0\} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{x \in \Omega : x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 2 (2. Aufwärmübung) Berechnen Sie $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ für die folgenden Mengenfolgen in \mathbb{R} :

- $A_n = [0, 1]$ falls n gerade und $A_n = [1, 2]$ falls n ungerade.
- Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle, gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergente Folge und A_n, B_n gegeben durch $A_n = (-\infty, x_n], B_n = [x_n, \infty)$.

Sind die Mengenfolgen konvergent?

Übungsaufgabe 3 Berechnen Sie $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$, wobei A_n die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $((-1)^n/n, 1/n)$ und Radius 1 in \mathbb{R}^2 bezeichnet.

Übungsaufgabe 4 Bestimmen Sie $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ für die folgenden Erzeuger \mathcal{E} und Grundgesamtheiten Ω :

- $\Omega = \{1, 2, 3\}, \mathcal{E} = \{\{1, 3\}\}$
- $\Omega = \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}, \mathcal{E} = \{\{q_i\} : i \geq k\}$ für festes $k \in \mathbb{N}$
- $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{E} = \{[-a, a] : a \in [0, \infty)\}$

Übungsaufgabe 5 Weisen Sie für zumindest zwei der 10 verbleibenden Mengensysteme in Lemma 1.14 nach, dass sie Erzeuger der Borel'sche σ -Algebra sind. Orientieren Sie sich dabei an den im Skriptum enthaltenen Beweisen für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 .

Übungsaufgabe 6 Die Voraussetzung, dass \mathfrak{h} ein Halbring ist, ist wesentlich für die Gültigkeit von Satz 1.11: Verwenden Sie folgendes Setup um diese Behauptung zu verifizieren (geeignete Wahl von a und b): $\Omega = \{1, 2, 3\}, \mathcal{E} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \mu(\{1\}) = a, \mu(\{1, 2\}) = b$.