2. Übung am 22. Oktober 2018

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 7 Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ einer Menge $A \subseteq \Omega$ ist definiert durch

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \in A^c. \end{cases}$$

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beliebiger Mengen, $\underline{A} := \liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\overline{A} := \limsup_{n\to\infty} A_n$. Gelten die folgende Gleichungen für jedes $x \in \Omega$?

$$\mathbf{1}_{\underline{A}}(x) = \liminf_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x)\,, \quad \mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = \limsup_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x)$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, dass $\limsup_{n\to\infty} A_n$ genau die Menge aller Punkte ist, die in unendlich vielen A_n liegen und dass $\liminf_{n\to\infty} A_n$ genau die Menge aller Punkte ist, die in nur endlichen vielen Mengen A_n NICHT (also in allen ab einem Index) liegen.

Übungsaufgabe 8 Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel messbar. Beweisen Sie, dass der Graph von f, definiert durch $\Gamma(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ eine zweidimensionale Borelmenge ist (also dass $\Gamma(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ gilt). Ist auch der Endograph $\Gamma^{\leq}(f)$, definiert durch $\Gamma^{\leq}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$ eine zweidimensionale Borelmenge?

Übungsaufgabe 9 (Fortsetzung von Aufgabe 4) Wir betrachten Ω_0, Ω und $\mathfrak{h}$ aus Aufgabe 4. Zusätzlich sei p ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{p}(\Omega_0)^\dagger$ mit $p(\{1\}), p(\{2\}) > 0$. Für jede Menge E der Form $E := E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \times \Omega_0 \times \Omega_0 \ldots \in \mathfrak{h}$ setzen wir

$$\mathbb{P}(E) = \prod_{i=1}^{n} p(E_i).$$

Zeigen Sie, dass damit ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{h})$ definiert ist, und berechnen Sie $\mathbb{P}(E)$ für die folgenden Mengen E:

1. $E = \{\mathbf{k}\}$ für ein beliebiges $\mathbf{k} \in \Omega$.
2. $E = \{\mathbf{k} \in \Omega : k_i \neq 2 \text{ ab einem Index}\}$.
3. $E = \{\mathbf{k} \in \Omega : k_i = 1 \text{ unendlich oft}\}$

Übungsaufgabe 10 Die Lebensdauern X_1 und X_2 zweier Bauteile seien exponentialverteilt mit Parameter $\theta = 1$ und unabhängig. Mit anderen Worten†: der Vektor (X_1, X_2) ist absolut stetig mit Dichte $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)}\mathbf{1}_{[0,\infty)^2}(x_1, x_2)$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(X_2 < X_1), \mathbb{P}(X_2 = X_1)$ sowie $\mathbb{P}(|X_1 - X_2| \leq 1)$.
Hinweis: Eine Skizze (und Beispiel 3.5) hilft.

Übungsaufgabe 11 (R) Verifizieren Sie die in Aufgabe 10 erhaltenen Resultate mittels Simulationen in R.
Hinweis: rexp und ifelse verwenden

$^\dagger\mathfrak{p}(\Omega_0)$...Potenzmenge von Ω_0
†muss nicht nachgerechnet werden