2. Übung am 16. Oktober 2017

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 6 Zeigen Sie, dass sich jede diskrete Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ in der Form $X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$ darstellen lässt, wobei die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und die Mengen $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = \Omega$ sind.

Übungsaufgabe 7 Beweisen Sie Satz 2.12.

Übungsaufgabe 8 Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel messbar. Beweisen Sie, dass der Graph von f, definiert durch $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ eine zweidimensionale Borelmenge ist (also dass $\Gamma(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ gilt).

Übungsaufgabe 9 (Fortsetzung von Aufgabe 4) Wir betrachten Ω_0, Ω und $\mathfrak{h}$ aus Aufgabe 4. Zusätzlich sei p ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{p}(\Omega_0)^{\dagger}$. Für jede Menge E der Form $E := E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \times \Omega_0 \times \Omega_0 \ldots \in \mathfrak{h}$ setzen wir

$$\mathbb{P}(E) = \prod_{i=1}^{n} p(E_i).$$

Zeigen Sie, dass damit ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{h})$ definiert ist, und berechnen Sie $\mathbb{P}(E)$ für die folgenden Mengen E:

1. $E = \{\mathbf{k}\}$ für ein beliebiges $\mathbf{k} \in \Omega$.
2. $E = \{\mathbf{k} \in \Omega : k_i \neq 3 \text{ ab einem Index}\}$.

Übungsaufgabe 10 Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ einer Menge $A \subseteq \Omega$ ist definiert durch

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \in A^c. \end{cases}$$

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge beliebiger Mengen, $\underline{A} := \liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\overline{A} := \limsup_{n\to\infty} A_n$. Gelten die folgende Gleichungen für jedes $x \in \Omega$?

$$\mathbf{1}_{\underline{A}}(x) = \liminf_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x), \quad \mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = \limsup_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x)$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, dass $\limsup_{n\to\infty} A_n$ genau die Menge aller Punkte ist, die in unendlich vielen A_n liegen und dass $\liminf_{n\to\infty} A_n$ genau die Menge aller Punkte ist, die in nur endlichen vielen Mengen A_n NICHT (also in allen ab einem Index) liegen.

$^{\dagger}\mathfrak{p}(\Omega_0)$...Potenzmenge von Ω_0