# 3. Übung am 24. Oktober 2023

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

**Übungsaufgabe 12 (Abschluss Aufgabe 3)** Seien die Mengen $A_n$ wie in Aufgabe 3. Verwenden Sie die in der letzten Übung vorgezeigten Ideen um zu bestimmen, welche Teile des Randes des Einheitskreises in $\liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n$ liegen.

**Übungsaufgabe 13** Die Lebensdauern $X_1$ und $X_2$ zweier Bauteile seien exponentialverteilt mit Parameter $\theta = 1$ und unabhängig. Mit anderen Worten[†]: der Vektor $(X_1, X_2)$ ist absolut stetig mit Dichte $f(x_1, x_2) = 4e^{-(2x_1+2x_2)}\mathbf{1}_{[0,\infty)^2}(x_1, x_2)$.
Berechnen Sie $\mathbb{P}(X_2 < X_1), \mathbb{P}(X_2 = X_1)$ sowie $\mathbb{P}((X_1 - X_2)^2 \leq 1)$.
Hinweis: Eine Skizze (und Beispiel 3.5) hilft.

**Übungsaufgabe 14** Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel messbar. Beweisen Sie, dass der Graph von $f$, definiert durch $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ eine zweidimensionale Borelmenge ist (also dass $\Gamma(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ gilt). Ist auch der Endograph $\Gamma^{\leq}(f)$, definiert durch $\Gamma^{\geq}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$ eine zweidimensionale Borelmenge?
Hinweis: Nachdem die Identität $i(x) = x$ Borel messbar ist, ist auch die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\Psi(x, y) := (f(x), y)$$

Borel messbar (warum?). Damit lassen sich beide Fragen sehr einfach beantworten.

**Übungsaufgabe 15** Beweisen Sie: Es existiert eine diskrete Zufallsvariable $X$ für die die Verteilungsfunktion $F_X$ strikt wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

**Übungsaufgabe 16** Betrachten Sie die folgende Funktion für $a > 0$:

$$F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-ax^2}) & \text{für } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $F_a$ eine Verteilungsfunktion ist und berechnen Sie für $X \sim F_a$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq 1), \mathbb{P}(X \geq 1), \mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X < 1), \mathbb{P}(X = 0), \mathbb{P}(X \in \mathbb{Q})$.
Ist $F_a$ absolut stetig?

**Übungsaufgabe 17 (Fortsetzung Aufgabe 11)** Zeigen Sie, dass die Metrik $\rho$ in Aufgabe 11 sogar eine Ultrametrik ist, dass also nicht nur die Dreiecksungleichung, sondern sogar

$$\rho(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \leq \max\{\rho(\mathbf{k}, \mathbf{m}),\, \rho(\mathbf{m}, \mathbf{l})\}$$

für alle $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m} \in \Sigma_2$ gilt. Zeigen Sie dann, dass jeder Punkt einer $\rho$-Kugel auch gleichzeitig Mittelpunkt der Kugel ist, i.e., für $\mathbf{k} \in B(\mathbf{m}, r) = \{\mathbf{l} \in \Sigma_2 : \rho(\mathbf{m}, \mathbf{l}) < r\}$ gilt $B(\mathbf{m}, r) = B(\mathbf{k}, r)$.
Ausblick: Ultrametische Räume wie $\Sigma_2$ spielen eine wichtige Rolle in der fraktalen Geometrie (siehe Deckblatt des Skriptums).

[†] muss nicht nachgerechnet werden