4. Übung am 31. Oktober 2023

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 18 (schon kurz in der VO besprochen)
Die in Beispiel 4.5 konstruierte Funktion C_∞ heisst Cantorfunktion weil sie analog zur Mittel-Drittel Cantormenge† konstruiert ist. Wie sieht die resultierende Menge $C^\star = \bigcap_{n=1}^\infty C_n$ aus, wenn wir im ersten Schritt in der Mitte 1 Intervall der Länge $\frac{1}{9}$, im zweiten Schritt 2 Intervalle der Länge (von jeweils) $\frac{1}{9^2}$, im n-ten Schritt 2^{n-1} Intervalle der Länge $\frac{1}{9^n}$ herausnehmen? Berechnen Sie $\lambda(C^\star)$. Enthält $C^\star$ ein nicht-degeneriertes Intervall, also ein Intervall mit Länge > 0? Enthält $(C^\star)^c$ ein nicht-degeneriertes Intervall?
Obige Konstruktionsmethode kann leicht modifiziert werden, um kompakte Mengen zu konstruieren, die kein Intervall enthalten, aber echt positives Lebesgue Mass haben - lesen Sie dafür den entsprechenden Wiki Eintrag für ‘fat Cantor sets’ (a.k.a. Smith-Volterra Cantor set) um fassen Sie zusammen, wie die Konstruktionsmethode funktioniert.

Übungsaufgabe 19 Betrachten Sie die folgende Funktion für $a > 0$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{2}{3} + a(1 - e^{-x+1}) & \text{für } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Bestimmen Sie a so, dass F eine Verteilungsfunktion ist. Hat F einen diskreten, einen absolut stetigen und einen singulären Anteil? Berechnen Sie für $X \sim F$ die Verteilungsfunktion von X^2.

Übungsaufgabe 20 Beweisen Sie vier der Aussagen 3-9 in Satz 4.12.

Übungsaufgabe 21 Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass für eine unstetige Verteilungsfunktion F und $X \sim F$ die Zufallsvariable $F \circ X$ nicht stetig gleichverteilt auf $[0, 1]$ sein kann.

Übungsaufgabe 22 (Fortsetzung von Aufgabe 11) Zeigen Sie, dass sich jede offene Kugel $B(\mathbf{k}, r)$ in (Σ_2, ρ) in der Form

$$B(\mathbf{k}, r) = \{k_1\} \times \{k_2\} \times \ldots \times \{k_n\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \ldots$$

mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$ darstellen lässt und zeigen Sie, dass $B(\mathbf{k}, r)$ daher auch abgeschlossen ist.
Provokant formuliert: Offene Kugel sind Rechtecke und abgeschlossen.

Übungsaufgabe 23 (Fortsetzung von Aufgabe 11) Wir betrachten abermals Σ_2. Zusätzlich sei p ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{p}(\{0, 1\})$† mit $p(\{0\}), p(\{1\}) > 0$. Für jede Menge E der Form $E := E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \times \Omega_0 \times \Omega_0 \ldots$ (also nur höchstens endlich viele E_i ungleich $\{0, 1\}$) setzen wir

$$\mathbb{P}(E) = \prod_{i=1}^n p(E_i).$$

† Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Menge

† $\mathfrak{p}(\{0, 1\})$...Potenzmenge von $\{0, 1\}$

Über Satz 1.11 (Satz von Caratheodory) lässt sich damit ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{B}(\Sigma_2)$ definieren (muss nicht gezeigt werden). Berechnen Sie $\mathbb{P}(E)$ für die folgenden Mengen E:

1. $E = \{\mathbf{k}\}$ für ein beliebiges $\mathbf{k} \in \Sigma_2$.
2. $E = \{\mathbf{k} \in \Sigma_2 : k_i \neq 1 \text{ ab einem Index}\}$.
3. $E = \{\mathbf{k} \in \Sigma_2 : k_i = 0 \text{ unendlich oft}\}$