5. Übung am 06. November 2017

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 21 Beweisen Sie: Für $A, B \in \mathcal{C}$ und $\alpha \in [0,1]$ folgt auch $\alpha A+(1-\alpha)B \in \mathcal{C}$. Zeigen Sie weiters, dass für jede Copula A die Funktion $\hat{A} : [0,1]^2 \to [0,1]$, definiert durch

$$\hat{A}(x_1, x_2) = x_2 - A(1 - x_1, x_2),$$

eine Copula ist und verwenden Sie dieses Resultat um zu zeigen, dass $W(x_1, x_2) = \max\{x_1 + x_2 - 1, 0\}$ eine Copula ist.

Übungsaufgabe 22 Zeigen Sie, dass C_θ, definiert durch $C_\theta(x, y) = xy + \theta\, xy(1-x)(1-y)$ für $x, y \in [0,1]$ für jedes $\theta \in [-\theta, \theta]$ eine Copula ist.
Hinweis: Beispiel 3.5

Übungsaufgabe 23 Ein Wahrscheinlichkeitsmass μ auf $\mathcal{B}([0,1]^2)$ heisst *doppelt stochastisch* genau dann wenn für jedes $E \in \mathcal{B}([0,1])$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\mu(E \times [0,1]) = \mu([0,1] \times E) = \lambda(E)$$

Beweisen Sie, dass durch $A(x, y) = \mu([0, x] \times [0, y])$ jeder Copula genau ein doppelt stochastisches Mass (und umgekehrt) zugeordnet wird.

Übungsaufgabe 24 **(a)** Geben Sie ein Beispiel dafür, dass eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, die die Punkte (F1) und (F2) in Lemma 4.18 erfüllt, und monoton wachsend in beiden Koordinaten ist, im Allgemeinen keine Verteilungsfunktion sein muss.
(b*) Wir schwächen Bedingung (F2) in Lemma 4.18 ab auf die Bedingung (F2'), gegeben durch

$$\lim_{x_1,x_2\to-\infty} F_X(x_1, x_2) = 0; \qquad \lim_{x_1,x_2\to\infty} F_X(x_1, x_2) = 1$$

Ist jede Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, die (F1), (F2'), (F3) erfüllt, die Verteilungsfunktion eines Zufallsvektors (X_1, X_2) ?

Übungsaufgabe 25 $W \in \mathcal{C}$ bezeichne im folgenden die Copula definiert durch

$$W(x_1, x_2) = \max\{x_1 + x_2 - 1, 0\}.$$

X_1, X_2 seien Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $(X_1, X_2) \sim \tilde{W}$ ($\tilde{W}$ bezeichne die von W induzierte Verteilungsfunktion gemäß Gleichung (3) in Copulas_Anwendungsbeispiel.pdf).
Beweisen Sie, dass dann $P(X_2 = 1 - X_1) = 1$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für jedes Rechteck $R \subseteq [0,1]^2$ echt unterhalb (oder echt oberhalb) der Nebendiagonale $\Delta := \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\} \subset [0,1]^2$ die Aussage $P^{(X_1,X_2)}(R) = 0$ gilt und überlegen Sie sich, wie Sie daraus das Resultat folgern können.