5. Übung am 14. November 2023

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 24 Zeigen Sie durch ein Beispiel†, dass zwei ufallsvariable X, Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ die gleiche Verteilungsfunktion haben können, obwohl $X(\omega) \neq Y(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ gilt.

Übungsaufgabe 25 (Aufwärmübung) Seien F und G seien eindimensionale Verteilungsfunktionen, A sei eine Copula. Beweisen Sie, dass dann $H : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, definiert durch

$$H(x,y) = A(F(x), G(y)), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

eine zweidimensionale Verteilungsfunktion ist.

Übungsaufgabe 26 Ein Wahrscheinlichkeitsmass μ auf $\mathcal{B}([0,1]^2)$ heisst *doppelt stochastisch* genau dann wenn für jedes $E \in \mathcal{B}([0,1])$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\mu(E \times [0,1]) = \mu([0,1] \times E) = \lambda(E)$$

Beweisen Sie, dass durch $A(x,y) = \mu([0,x] \times [0,y])$ jeder Copula (siehe Definition 4.28) genau ein doppelt stochastisches Mass (und umgekehrt) zugeordnet wird.

Übungsaufgabe 27 Seien (X, Y) ein Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, es gelte $(X, Y) \sim H$ mit H stetig, weiters bezeichne F die Verteilungsfunktion von X, und G jene von Y. Beweisen Sie von folgender Äquivalenz mindestens eine Richtung:

1. (X, Y) hat Copula M.
2. Es existiert eine nicht-fallende Funktion $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Menge $E \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(E) = 1$ und $Y(\omega) = T(X(\omega))$ für jedes $\omega \in E$.

Übungsaufgabe 28 Eine messbare Abbildung $h : [0,1] \to [0,1]$ heisst λ-treu genau dann, wenn $\lambda^h = \lambda$ gilt†. Geben Sie vier verschiedene Beispiele für solche λ-treuen Transformationen an und zeigen Sie, dass für beliebige λ-treue Abbildungen $h, g : [0,1] \to [0,1]$ die Funktion A, definiert durch

$$A(x,y) = \lambda(h^{-1}([0,x]) \cap g^{-1}([0,y]))$$

eine Copula ist.

Übungsaufgabe 29 (*) Angenommen, $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge λ-treuer Transformationen auf $[0,1]$, die punktweise gegen eine Funktion $h : [0,1] \to [0,1]$ konvergiert. Ist dann auch h λ-treu?

---

†geeignete Wahl von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und X, Y

†i.e. $\lambda(h^{-1}(E)) = \lambda(E)$ für jedes $E \in \mathcal{B}([0,1])$