6. Übung am 21. November 2023

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 30 Beweisen Sie Satz 4.32 über die Transformationsinvarianz von Copulas.

Übungsaufgabe 31 Seien (X, Y) ein Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, es gelte $(X, Y) \sim H$ mit H stetig. Weiters sei $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt wachsend und es gelte $Y(\omega) = T(X(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$. Zeigen Sie, dass (X, Y) die Minimumscopula M als Copula (gemäß Satz von Sklar) hat.

Übungsaufgabe 32 Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Drücken Sie die Verteilungsfunktionen F_{X^+} und F_{X^-} von X^+ und X^- durch F aus. Drücken Sie weiters $F_{|X|}$, F_{-X} und F_{X^2} durch F aus und wählen Sie eine konkrete Zufallsvariable X, die positive und negative Werte annehmen kann, und zeichnen Sie deren Verteilungsfunktion F sowie alle zuvor erwähnten Verteilungsfunktionen.

Übungsaufgabe 33 Sei μ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ liegt per definitionem im Träger $Tr(\mu)$ von μ, genau dann, wenn jede offene Kugel $B(x, r)$ um x mit Radius $r > 0^\dagger$ Masse hat, i.e., wenn $\mu(B(x, r)) > 0$ gilt.
Beweisen Sie, dass $Tr(\mu)$ eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Übungsaufgabe 34 Beweisen Sie Satz 5.15.
Hinweis: Sie können entweder dem Integralaufbau folgen und das Resultat zuerst (S1) für nicht-negative Zufallsvariable X, und dann (S2) für integrierbare Zufallsvariable unter Verwendung der Zerlegung $X = X^+ - X^-$ beweisen. Einfacher (und eleganter) geht es jedoch gleich allgemein durch geschickte Anwendung des Satzes von Fubini.

Übungsaufgabe 35 Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar, und $h \circ X$ integrierbar. Beweisen Sie die folgende Gleichheit (a.k.a. Transformationsformel):

$$\mathbb{E}(h \circ X) = \int_{\mathbb{R}} h(x) d\,\mathbb{P}^X(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^X}(h)$$

wobei die zweite Gleichheit reine Notation ist und nur andeutet, dass der Erwartungswert der Zufallsvariable h auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}^X)$ betrachtet wird.
Hinweis: Dem Integralaufbau folgen und die Gleichheit zuerst für einfaches h beweisen.

---

†in unserem Fall also jedes offene Intervall $(x - r, x + r)$