

6. Übung am 13. November 2017

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.truttschnig.net/courses mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 26 Beweisen Sie Satz 4.32 über die Transformationsinvarianz von Copulas.

Übungsaufgabe 27 Angenommen $X \sim \mathcal{E}(\theta_1)$ und $Y \sim \mathcal{E}(\theta_2)$ mit $\theta_1, \theta_2 > 0$. Berechnen Sie die maximale Wahrscheinlichkeit für $\mathbb{P}(X = Y)$ unter Verwendung von Gleichung (6) in Copulas_Anwendungsbeispiel.pdf.

Übungsaufgabe 28 Sei X eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion F , die Transformation $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei strikt wachsend, und Y sei definiert durch $Y = T \circ X$. Berechnen Sie die (X, Y) zugrundeliegende Copula A , i.e. jene Copula, für die die folgende Gleichheit für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = A(\mathbb{P}(X \leq x), \mathbb{P}(Y \leq y))$$

Übungsaufgabe 29 (R) Verwenden Sie den R-Code `marshall_olkin_simulation.R` um Stichproben der Marshall-Olkin copula $M_{\alpha, 0.5}$ zu erzeugen und zu plotten. Schätzen Sie $\mathbb{P}(Y = X^{2\alpha})$ mit Hilfe von Simulationen für jedes $\alpha \in [0, 1]$ und versuchen Sie, die Funktion $\alpha \mapsto \mathbb{P}(Y = X^{2\alpha})$ explizit anzugeben (ohne analytische Berechnung/Beweis!).

Übungsaufgabe 30 Betrachten Sie die Funktion F , definiert durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 & \text{if } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist und bestimmen Sie (falls existent) den diskreten, den absolut stetigen und den singulären Anteil. Betrachten Sie weiters $X \sim F$ und berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ gemäß Definition 5.6 indem Sie genau die im Beweis von Satz 5.5 verwendete Approximation (5.5) verwenden.