8. Übung am 05. Dezember 2023

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 41 (Angabe länger als Lösung) Beweisen Sie den Weierstrass'schen Approximationssatz† elegant und einfach mit Hilfe des in der Vorlesung bewiesenen Schwachen Gesetzes der Großen Zahlen in 5 Schritten:

1. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ bezeichne sie Maximumsnorm. Rufen Sie sich in Erinnerung, dass dann f sogar gleichmäßig stetig ist, i.e. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ falls $|x - y| < \delta$.
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Bernstein Polynom $B_n f$ an der Stelle $x \in [0, 1]$ definiert durch
$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$
3. Sei nun $p \in [0, 1]$ fest und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, $Bin(1, p)$-verteilter Zufallsvariable. Wir setzen $\overline{X}_n(\omega) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
4. Zeigen Sie
$$\mathbb{E}\big(f \circ \overline{X}_n\big) = B_n f(p) \quad \text{sowie} \quad |f(\overline{X}_n) - f(p)| \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbf{1}_{[\delta,1]}\big(|\overline{X}_n(\omega) - p|\big).$$
5. Zeigen Sie mit Hilfe von Punkt 4 und der Tschebyscheff'schen Ungleichung
$$|B_n f(p) - f(p)| \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$
und folgern Sie damit
$$\lim_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_\infty = 0$$

Übungsaufgabe 42 (R) Visualisieren Sie das WLLN mit Hilfe von Simulationen in R und gehen Sie dafür wiefolgt vor: Betrachten Sie $n = 1000$ und $\varepsilon = \frac{1}{10}$ und wählen Sie eine feste quadratische integrierbaren Zufallsvariable X. Generieren Sie $R = 1000$ Mal Stichproben $X_1, X_2, \ldots, X_n$ von X, setzen Sie $h_j = 1$ genau dann, wenn $|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon$ und $h_j = 0$ sonst. Berechnen Sie dann†
$$\overline{h}_R := \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{R} h_j$$
und plotten Sie ein Histogramm der Mittelwerte $\overline{X}_n^1, \ldots, \overline{X}_n^R$ zusammen mit dem Intervall $[\mathbb{E}(X) - \varepsilon, \mathbb{E}(X) + \varepsilon]$. Wiederholen Sie Ihr Experiment für größeres und kleineres n.

Übungsaufgabe 43 (R) Lesen Sie Beispiel 6.8 und beweisen Sie, dass die Zufallsvariable $X_1, X_2, X_3, \ldots$ (zumindest) paarweise unabhängig sind.

---

†Jede stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ ist der gleichmäßige Grenzwert von Polynomen

†als Approximation von $\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon)$)

Übungsaufgabe 44 Sei ϑ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathcal{B}([0,1])$ mit $\int_{[0,1]} s d\vartheta(s) = \frac{1}{2}$. Weiter sei die Funktion $A : [0,1] \to [0,1]$ definiert durch

$$A(t) = 2 \int_{[0,1]} \max\{ts, (1-t)(1-s)\} d\vartheta(s).$$

Beweisen Sie, dass sich A vereinfachen lässt zu

$$A(t) = t + 2 \int_{[0,1-t]} \vartheta([0,s]) d\lambda(s)$$

Übungsaufgabe 45 Beweisen Sie Satz 6.14.