8. Übung am 04. Dezember 2017

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 35 Gibt es eine diskrete Zufallsvariable X, deren Verteilungsfunktion F strikt wachsend auf ganz $\mathbb{R}$ ist? Falls nein, beweisen Sie Ihre Behauptung, falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel.

Übungsaufgabe 36 Sei X eine nicht-negative absolut stetige Zufallsvariable mit Dichte f, wobei (der Einfachheit halber) $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, M]^c$ gelte ($M > 0$ fest). Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ gemäß Definition 5.6 indem Sie genau die im Beweis von Satz 5.5 verwendete Approximation (5.5) verwenden und zeigen Sie damit, dass die allgemeine Definition des Erwartungswerts konsistent mit Definition 3.7 ist.

Übungsaufgabe 37 (X_1, X_2) sei absolut stetig mit Dichte f_θ gemäß Beispiel 3.5. Für welches θ ist $\rho(X_1, X_2)$ minimal, für welches θ ist $\rho(X_1, X_2)$ maximal ?

Übungsaufgabe 38 Beweisen Sie den Weierstrass'schen Approximationssatz[†] elegant und einfach mit Hilfe des in der Vorlesung bewiesenen Schwachen Gesetzes der Großen Zahlen:

1. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ bezeichne sie Maximumsnorm. Rufen Sie sich in Erinnerung, dass dann f sogar gleichmäßig stetig ist, i.e. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ falls $|x - y| < \delta$.

2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Bernstein Polynom $B_n f$ an der Stelle $x \in [0, 1]$ definiert durch
$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

3. Sei nun $p \in [0, 1]$ fest und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, $Bin(1, p)$-verteilter Zufallsvariable. Wir setzen $\overline{X}_n(\omega) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

4. Zeigen Sie
$$\mathbb{E}\big(f \circ \overline{X}_n\big) = B_n f(p) \quad \text{sowie} \quad |f(\overline{X}_n) - f(p)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbf{1}_{[\delta,1]}\big(|\overline{X}_n(\omega) - p|\big).$$

5. Zeigen Sie mit Hilfe von Punkt 4 und der Tschebyscheff'schen Ungleichung
$$|B_n f(p) - f(p)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$
und folgern Sie damit
$$\lim_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_\infty = 0$$

[†] Jede stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ ist der gleichmäßige Grenzwert von Polynomen