9.+10. Übung am 13. Jänner 2019

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 49 Wir betrachten zwei diskrete Zufallsvariable X, Y mit Werten in $\{-1, 0, 1\}$ und der folgenden gemeinsamen Verteilung:

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{32} & \text{für } (i,j) \in \{(1,1), (-1,1)\}, \\ \frac{3}{32} & \text{für } (i,j) \in \{(-1,-1), (1,-1), (1,0), (0,1)\}, \\ \frac{5}{32} & \text{für } (i,j) \in \{(-1,0), (0,-1)\}, \\ \frac{8}{32} & \text{für } (i,j) = (0,0) \end{cases}$$

Sind X und Y unabhängig? Sind X^2 und Y^2 unabhängig?

Übungsaufgabe 50 $X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge unabhängiger Zufallsvariable. Welche der Folgenden aus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruierten Folgen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen sind unabhängig?

1. $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ beliebig und $Y_i(\omega) := \mathbf{1}_B(X_i(\omega))$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.
2. $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ beliebig und $Y_i := \mathbf{1}_B(X_i(\omega), X_{i+1}(\omega))$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.
3. $k \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ beliebig und $Y_i := \mathbf{1}_B(X_{ki-(k-1)}(\omega), X_{ki-(k-2)}(\omega), \ldots, X_{ki}(\omega))$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 51 Die Zufallsvariable $Y_1, Y_2, \ldots$ seien unabhängig und logarithmisch normalverteilt mit Parametern μ, σ (siehe Gleichung (3.13)). Beweisen Sie die Existenz einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} Y_i} = c \;\; [\mathbb{P}]$$

und bestimmen Sie c.

Übungsaufgabe 52 Berechnen Sie die charakteristische Funktion von $X \sim \mathcal{U}(-a, a)$ und damit alle Momente $\mathbb{E}(X^k)$ für $k \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 53 Sei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 54 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge mit Verteilungsfunktion F, F_n bezeichne die empirische Verteilungsfunktion gemäß Gleichung (7.3). Beweisen Sie (als Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes) das folgende Resultat: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $F(x) \in (0, 1)$ und beliebiges $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \sqrt{n}(F_n(x)(\omega) - F(x)) \le z\big\}\Big) = \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{F(x)(1 - F(x))}}\right)$$

Übungsaufgabe 55 (Euler'schen Primzahldarstellung der Zetafunktion) Die Riemann'sche Zeta-Funktion ζ ist für $s \in (1, \infty)$ definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

X sei eine diskrete Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}$ für $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. $\mathcal{P}$ bezeichne die Menge aller Primzahlen, $\mathcal{P}_n$ sei definiert durch $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap [1, n]$. Für jedes $p \in \mathcal{P}$ sei $D_p \in \mathcal{A}$ definiert durch

$$D_p := \{\omega \in \Omega : p \text{ teilt } X(\omega)\}.$$

1. Zeigen Sie $\mathbb{P}(D_p) = \frac{1}{p^s}$.
2. Beweisen Sie, dass die Familie $(D_p)_{p \in \mathcal{P}}$ unabhängig ist.
3. Zeigen Sie die Gleichheit

   $$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \lim_{n \to \infty} \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

   in dem Sie $\{1\} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} D_p^c$ und die Unabhängigkeit der Familie $(D_p^c)_{p \in \mathcal{P}}$ verwenden.

Übungsaufgabe 56 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine i.i.d. Folge integrierbarer Zufallsvariable, T sei eine weitere integrierbare und zu $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariable† mit $\mathbb{P}(T \in \mathbb{N}) = 1$. Weiters sei die zufällige Summe† S definiert durch

$$S = \sum_{i=1}^{T} X_i.$$

Beweisen Sie: S ist ebenfalls integrierbar und es gilt $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T)$.
Hinweis: $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \mathbf{1}_{\{n\}}(T)$ mit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

† präziser: $T, X_1, X_2, \ldots$ ist eine unabhängige Folge

† auch die Anzahl der Summanden ist zufällig