9. Übung am 12. Dezember 2023

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 46 (Wiederholung Unabhängigkeit diskreter Zufallsvariable) Wir betrachten zwei diskrete Zufallsvariable X, Y mit Werten in $\{-1, 0, 1\}$ und der folgenden gemeinsamen Verteilung:

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{32} & \text{für } (i, j) \in \{(1, 1), (-1, 1)\}, \\ \frac{3}{32} & \text{für } (i, j) \in \{(-1, -1), (1, -1), (1, 0), (0, 1)\}, \\ \frac{5}{32} & \text{für } (i, j) \in \{(-1, 0), (0, -1)\}, \\ \frac{8}{32} & \text{für } (i, j) = (0, 0) \end{cases}$$

Sind X und Y unabhängig? Sind X^2 und Y^2 unabhängig? Für welches $n \in \mathbb{N}$ sind X^n und Y^n unabhängig?

Übungsaufgabe 47 Wir wissen aus der Vorlesung, dass für unanbhängige Zufallsvariable X, Y und messbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch $f \circ X$ und $g \circ Y$ unabhängig sind. Angenommen X, Y sind unkorreliert und quadratisch integrierbar. Sind dann auch $f \circ X$ und $g \circ Y$ unkorreliert?

Übungsaufgabe 48 Die Funktion F sei gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} + a(1 - e^{-x}) & \text{für } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie die Konstante a so, dass F Verteilungsfunktion ist.
2. Bestimmen Sie (falls existent), die diskrete, die absolut stetige und die singuläre Komponente von F.
3. Gelte $X \sim F$. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$.
4. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion G von $Z := X^2$.
5. Berechnen Sie $\mathbb{E}(Z)$ und $\mathbb{V}(X)$.
6. Skizzieren Sie einen Algorithmus zur Erzeugung von Stichproben von $X \sim F$.
7. Sei $X_n := X^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, weiters bezeichne F_n die Verteilungsfunktion von X_n. Konvergiert die Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach?

Übungsaufgabe 49 Ein fairer Würfel wird unendlich oft geworfen, $X_i \in \{1, \ldots, 6\}$ bezeichne das Ergebnis des i-ten Wurfes. Weiters definieren wir $Y_n = \mathbf{1}_{(1,1,1)}(X_{3n-2}, X_{3n-1}, X_{3n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_n$ fast sicher und, wenn ja, wogegen? Bleibt die Antwort gleich, wenn wir $(1, 1, 1)$ durch $(i, j, l) \in \{1, \ldots, 6\}^3$ ersetzen?