9. Übung am 11. Dezember 2017

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 39 Wir betrachten zwei Borelmengen $M, N \in \mathcal{B}([0,1])$ mit $\lambda(M) = \lambda(N) = \frac{1}{2}$ und setzen $F(x) = 2\lambda(M \cap [0,x]), G(x) = 2\lambda(N \cap [0,x])$ für jedes $x \in \mathbb{R}^{\dagger}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. F, G sind absolut stetige Verteilungsfunktionen mit $F(0) = G(0) = 0$ und $F(1) = G(1) = 1$.
2. Für $X \sim F$ und $Y \sim G$ gilt $\mathbb{P}(X \in M) = 1 = \mathbb{P}(Y \in N)$.

Hinweis: $F(x) = 2\lambda(M \cap [0,x]) = \int_{(-\infty,x]} 2 \cdot \mathbf{1}_M(z) d\lambda(z)$

Übungsaufgabe 40 (Fortsetzung von Aufgabe 39) Seien M, N, F, G wie in Aufgabe 39. Zusätzlich sei A eine beliebige Copula. Die Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ sei definiert durch

$$H(x,y) = A(F(x), G(y))$$

für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass H eine zweidimensionale Verteilungsfunktion ist und dass für $(X,Y) \sim H$ die Aussage $\mathbb{P}((X,Y) \in M \times N) = 1$ gilt.

Übungsaufgabe 41 $X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge unabhängiger Zufallsvariable. Welche der Folgenden aus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruierten Folgen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen sind unabhängig?

1. $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ beliebig und $Y_i(\omega) := \mathbf{1}_B(X_i(\omega))$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.
2. $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^2)$ beliebig und $Y_i := \mathbf{1}_B(X_{2i-1}(\omega), X_{2i}(\omega))$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.
3. $k \in \mathbb{N}$, $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^k)$ beliebig und $Y_i := \mathbf{1}_B(X_{ki-(k-1)}(\omega), X_{ki-(k-2)}(\omega), \ldots, X_{ki}(\omega))$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 42 Die Zufallsvariable X_1, X_2 seien unabhängig und es gelte $X_i \sim \mathcal{E}(\theta_i)$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $\overline{Z} := \max\{X_1, X_2\}$ und von $\underline{Z} := \min\{X_1, X_2\}$. Kommt Ihnen die Form von $\underline{Z}$ bekannt vor?

Übungsaufgabe 43 Sei (X,Y) absolut stetig mit Wahrscheinlichkeitsdichte (stetige Gleichverteilung am Einheitskreis)

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_K(x,y) \quad \text{wobei } K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Sind X und Y unabhängig?

† Für $x < 0$ setzen wir $[0,x] = \emptyset$