

9. Übung am 22. Dezember 2020

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.truttschnig.net/courses mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 45 Denken Sie den Beweis von Satz 6.4 Zeile für Zeile durch.

Übungsaufgabe 46 Ein Tiroler beschließt, während einer stockdunklen Nacht bei seiner (3 Gehstunden entfernt wohnenden) Angebeteten fensterln[†] zu gehen. Um den Weg besser sehen zu können, nimmt er eine Taschenlampe und 2 Batterien, deren Lebensdauer $T \sim \mathcal{U}(0, 2)$ erfüllt, mit. Ist die erste Batterie entladen, nimmt er die zweite in Betrieb. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Taschenlampe bis zur Ankunft funktioniert. Wie stark erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, wenn er 3 statt 2 Batterien mitnimmt?

Hinweis: Satz 6.10

Übungsaufgabe 47 Wir betrachten die Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Beispiel 6.8: Zeigen Sie, dass sich $X_n^{-1}(\{j\})$ so berechnen lässt wie angegeben, berechnen Sie $P(X_n = j) = P^{X_n}(\{j\})$ und zeigen Sie, dass die Familie $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise unabhängig ist. Zusatz*: Zeigen Sie die Unabhängigkeit von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Übungsaufgabe 48 X, Y seien Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion F bzw. G . Beweisen Sie: (X, Y) hat Copula W genau dann, wenn eine nichtwachsende Transformation $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $Y = T \circ X$ [P] gilt.

Übungsaufgabe 49 Wir betrachten zwei diskrete Zufallsvariable X, Y mit Werten in $\{-1, 0, 1\}$ und der folgenden gemeinsamen Verteilung:

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{32} & \text{für } (i, j) \in \{(1, 1), (-1, 1)\}, \\ \frac{3}{32} & \text{für } (i, j) \in \{(-1, -1), (1, -1), (1, 0), (0, 1)\}, \\ \frac{5}{32} & \text{für } (i, j) \in \{(-1, 0), (0, -1)\}, \\ \frac{8}{32} & \text{für } (i, j) = (0, 0) \end{cases}$$

Sind X und Y unabhängig? Sind X^2 und Y^2 unabhängig?

Übungsaufgabe 50 Beweisen Sie den ersten Teil von Satz 6.14 für den Fall, dass X, Y nicht-negative, integrierbare Zufallsvariablen sind.

[†]<https://de.wikipedia.org/wiki/Fensterln>