10. Übung am 18. Dezember 2017

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 44 Wir betrachten die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Beispiel 6.8: Zeigen Sie, dass sich $X_n^{-1}(\{j\})$ so berechnen lässt wie angegeben, berechnen Sie $P(X_n = j) = P^{X_n}(\{j\})$ und zeigen Sie, dass die Familie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise unabhängig ist.
Zusatz*: Zeigen Sie die Unabhängigkeit von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Übungsaufgabe 45 Sei $X, Y \sim \mathcal{E}(\theta)$ und X, Y unabhängig. Berechnen Sie die Dichte und Verteilungsfunktion von $X - Y$.

Übungsaufgabe 46 Ein Tiroler beschließt, während einer stockdunklen Nacht bei seiner (1.5 Gehstunden entfernt wohnenden) Angebeteten fensterln zu gehen. Um den Weg besser sehen zu können, nimmt er eine Taschenlampe und zwei Batterien, deren Lebensdauer $T \sim \mathcal{U}(0,1)$ erfüllt, mit. Ist die erste Batterie entladen, nimmt er die zweite in Betrieb. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Taschenlampe bis zur Ankunft funktioniert. Wie stark erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, wenn er drei statt zwei Batterien mitnimmt?
Hinweis: Satz 6.10

Übungsaufgabe 47 Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei unabhängig und jedes X_n sei diskret gleichverteilt auf $\{0,\ldots,9\}$. Die Zufallsvariable Y_n bezeichne, wie oft die Kombination $(0,1)$ in $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n-1}, X_{2n})$ auftritt[†]. Beweisen Sie mit Hilfe des WLLN die folgende Aussage:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{Y_n}{n} \in \Big[\frac{9}{1000}, \frac{11}{1000}\Big]\Big) = 1$$

Übungsaufgabe 48 Eine Zufallsvariable X (bzw. ihre Verteilung $\mathbb{P}^X$) heisst unendlich teilbar, genau dann wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ identisch verteilte, unabhängige Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit $X = X_1 + \ldots + X_n$ gibt. Beweisen Sie, dass jede normalverteilte Zufallsvariable unendlich teilbar ist.

[†] Offensichtlich gilt $Y_n \in \{0,\ldots,n\}$; weiters gilt $Y_n = n$ genau dann wenn $(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_{2n-1}(\omega), X_{2n}(\omega)) = (0,1,0,1,\ldots,0,1)$