10. Übung am 12. Jänner 2021

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 51 (Aufwärmübung) Beweisen Sie Ungleichung (7.2).

Übungsaufgabe 52 Sei (X, Y) absolut stetig mit Wahrscheinlichkeitsdichte (stetige Gleichverteilung am Einheitskreis)

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_K(x, y) \quad \text{wobei } K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Sind X und Y unabhängig?
Berechnen Sie für jedes $x \in (0, 1)$ weiters $\mathbb{E}(Y|X = x) := \int_{\mathbb{R}} y\, f(x, y) d\lambda(y)$.

Übungsaufgabe 53 X, Y seien Zufallsvariable mit stetiger Verteilungfunktion F bzw. G. Beweisen Sie: (X, Y) hat Copula M genau dann, wenn eine nichtfallende Transformation $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $Y = T \circ X$ $[\mathbb{P}]$ gilt.

Übungsaufgabe 54 Die Zufallsvariable $Y_1, Y_2, \ldots$ seien unabhängig und logarithmisch normalverteilt mit Parametern μ, σ (siehe Gleichung (3.13)). Beweisen Sie die Existenz einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} Y_i} = c \;\; [\mathbb{P}]$$

und bestimmen Sie c.

Übungsaufgabe 55 (Euler'schen Primzahldarstellung der Zetafunktion) Die berühmte Riemann'sche Zeta-Funktion ζ ist für $s \in (1, \infty)$ definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

X sei eine diskrete Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}$ für $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. $\mathcal{P}$ bezeichne die Menge aller Primzahlen, $\mathcal{P}_n$ sei definiert durch $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap [1, n]$. Für jedes $p \in \mathcal{P}$ sei $D_p \in \mathcal{A}$ definiert durch

$$D_p := \{\omega \in \Omega : p \text{ teilt } X(\omega)\}.$$

1. Zeigen Sie $\mathbb{P}(D_p) = \frac{1}{p^s}$.
2. Beweisen Sie, dass die Familie $(D_p)_{p\in\mathcal{P}}$ unabhängig ist.
3. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{p\in\mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

in dem Sie $\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} D_p^c$ und die Unabhängigkeit der Familie $(D_p^c)_{p\in\mathcal{P}}$ verwenden.

Übungsaufgabe 56 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine i.i.d. Folge integrierbarer, nicht-negativer Zufallsvariable, T sei eine weitere integrierbare und zu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariable† mit $\mathbb{P}(T \in \mathbb{N}) = 1$. Weiters sei die zufällige Summe† S definiert durch

$$S = \sum_{i=1}^{T} X_i.$$

Beweisen Sie: S ist ebenfalls integrierbar und es gilt $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T)$.
Hinweis: $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \mathbf{1}_{\{n\}}(T)$ mit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Frohe Weihnachten, erholsame Feiertage und ein gesundes Jahr 2021!

†präziser: $T, X_1, X_2, \ldots$ ist eine unabhängige Folge

†auch die Anzahl der Summanden ist zufällig