11. Übung am 08. Jänner 2018

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 49 Beweisen Sie die Abschätzung (7.2) für den Fehler in der Monte-Carlo-Integration für den Fall, dass $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig ist.
(R) Wählen Sie weiters ein festes, stetiges g und überprüfen Sie mit Hilfe von Simulationen ob die Abschätzung sehr grob ist, i.e. ob die angegebene Wahrscheinlichkeit wesentlich kleiner ist als der Ausdruck $\frac{V}{M^2}$.

Übungsaufgabe 50 (Romeo & Julia) Angenommen ein Affe drückt unendlich oft hintereinander jeweils eine der 30 Tasten einer Tastatur. X_i bezeichne die im i-ten Schritt gedrückte Taste. Wir nehmen an, dass alle Tasten gleich wahrscheinlich sind und die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. ist. Beweisen Sie mit Hilfe des SLLN, dass der Affe mit Wahrscheinlichkeit eins unendlich oft den kompletten Text von Romeo & Julia schreibt.
Hinweis: Es ist zwecksmäßig, die Tasten mit 1 bis 30 durchzunummerieren.

Übungsaufgabe 51 Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\{0,1\}, \mathfrak{p}(\{0,1\}), \mu)$ mit $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Die Abbildung $T : \Omega \to \Omega$ sei definiert durch $T(\omega) = 1 - \omega$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ setzen wir $X_n(\omega) = T^n(\omega) = T \circ T \circ \cdots \circ T(\omega)$. Zeigen Sie, dass alle X_n die selbe Verteilung haben, die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht unabhängig ist. Berechnen Sie weiters für jedes $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$$

und erklären Sie, inwiefern ist das Resultat (in Anbetracht des SLLN) überraschend ist.

Übungsaufgabe 52 Die Zufallsvariable $Y_1, Y_2, \ldots$ seien unabhängig und logarithmisch normalverteilt mit Parametern μ, σ (siehe Gleichung (3.13)). Beweisen Sie die Existenz einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} Y_i} = c \;\; [\mathbb{P}]$$

und bestimmen Sie c.

Übungsaufgabe 53 Ein fairer Würfel wird unendlich oft geworfen, $X_i \in \{1, \ldots, 6\}$ bezeichne das Ergebnis des i-ten Wurfes. Weiters definieren wir $Y_n = \mathbf{1}_{(1,1)}(X_n, X_{n+1})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_n$ fast sicher? Wenn ja, wogegen?
Hinweis: Ist die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und sind die Voraussetzungen des SLLN erfüllt?

Frohe Weihnachten und erholsame Feiertage!