11. Übung am 9. Jänner 2024

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 53 Seien $F, F_1, F_2, \dots$ eindimensionale Verteilungsfunktionen. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen:

1. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen F (siehe Definition 8.10 und/oder VO Wahrscheinlichkeitsrechnung).

2. Es existiert eine dichte Teilmenge D von $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ für jedes $x \in D$.

Übungsaufgabe 54 Angenommen $F, F_1, F_2, \dots$ sind eindimensionale Verteilungsfunktionen und $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen F. Falsifizieren oder beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn F stetig ist, dann gilt sogar $\lim_{n\to\infty} \|F_n - F\|_\infty = 0$.

Übungsaufgabe 55 Berechnen Sie $\mathbb{E}(X^k)$ für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und beliebiges $k \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der charakteristischen Funktion φ_X von $X^\dagger$.
Hinweis: Lesen Sie Satz 8.8. und arbeiten Sie mit Potenzreichen (anstatt mit mühsam zu berechnenden Ableitungen).

Übungsaufgabe 56 (R) Illustrieren Sie das CLT mit Hilfe von Simulationen in R und gehen Sie wiefolgt vor, wobei $n = 1000$:

1. Wähle Sie eine feste Verteilungsfunktion F mit $\mathbb{V}(X) \in (0, \infty)$ für $X \sim F$.

2. Erzeugen Sie eine Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ von $X \sim F$ und berechnen Sie $\overline{X}_n$.

3. Wiederholen Sie obigen Vorgang mindestens $R = 1000$ Mal und plotten Sie ein Histogramm der so erhaltenen Werte $\overline{X}_n^1, \overline{X}_n^2, \dots, \overline{X}_n^R$, in das Sie auch die Dichte von $\mathcal{N}(0,1)$ einzeichnen (*dnorm* in R).

4. Wiederholen Sie obigen Schritte für ein andere Verteilungsfunktion G.

Übungsaufgabe 57 Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d., $X_1 \sim Bin(1,p)$ mit $p \in (0,1)$, und $n = 1000$. Nachdem n 'groß' ist, scheint es naheliegend, das folgende, auf dem CLT basierende (asymptotische) Konfidenzintervall $CI_{1-\alpha}$ für p zu verwenden†

$$CI_{1-\alpha}(p) = \left[\overline{X}_n - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\Phi^-(1-\tfrac{\alpha}{2})\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)},\quad \overline{X}_n + \tfrac{1}{\sqrt{n}}\Phi^-(1-\tfrac{\alpha}{2})\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}\right].$$

Leiten Sie dieses Intervall her und überprüfen Sie dann für $p = 0.5$ und $p = 0.001$, ob das Intervall das tut, was es tun soll (also ob es den echten Parameter p in ca. $100(1-\alpha)$ Prozent aller Fälle enthält).

Frohe Weihnachten, erholsame Feiertage und ein gesundes Jahr 2024!

$^\dagger \varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$ darf ohne Beweis verwendet werden
$^\dagger \Phi^-(1-\frac{\alpha}{2})$ bezeichnet wie gewohnt das $(1-\alpha/2)$-Quantil der Standard-Normalverteilung