12. Übung am 26. Jänner 2021

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 63 Lesen Sie Kapitel 10 bis inkl. Definition 10.6. und beantworten Sie dann die nachfolgenden zwei Fragen für eine Zufallsstichprobe $X_1, X_2, \ldots$ von $X \sim Pois(\theta)$ und den Schätzer $\hat{\theta}_n := \overline{X}_n$ von θ:

1. Ist $\hat{\theta}_n$ erwartungstreu?
2. Ist $\hat{\theta}_n$ (stark) konsistent?

Übungsaufgabe 64 (i) Konstruieren Sie Zufallsvariable $X, X_1, X_2, \ldots$, für die $X_n \xrightarrow{w} X$, aber nicht $X_n \xrightarrow{P} X$ gilt.
(ii) Geben Sie ein Beispiel für Zufallsvariable $X, X_1, X_2, \ldots$ an, für die $X_n \xrightarrow{P} X$ aber nicht $X_n \xrightarrow{[P]} X$ gilt.

Übungsaufgabe 65 Geben Sie ein Beispiel für Zufallsvariable $X, X_1, X_2, \ldots$ an, für die $X_n \xrightarrow{P} X$ aber in keinem (!) Punkt $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ gilt.

Übungsaufgabe 66 Beweisen Sie die erste und die zweite Aussage des Continuous Mapping Theorems (Satz 9.9) für den Fall, dass g stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.
Hinweis @zweite Aussage: Falls das Teilfolgenprinzip für die Konvergenz im Maß in Analysis 3 nicht besprochen wurde, werfen Sie (zwecks möglichst einfachem Beweis) einen Blick auf das Theorem am Ende der Seite, das Sie ohne Beweis verwenden können.

Übungsaufgabe 67 Die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariable X sei streng monoton wachsend auf $[a, b]$ (mit $a < b$) und erfülle $F(a) = 0, F(b) = 1$. $(X_1, \ldots, X_n)$ sei eine Zufallsstichprobe von X, und die Zufallsvariable $X_1^{(1)}, X_n^{(n)}$ seien definiert durch

$$X_n^{(1)}(\omega) = \min\big\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big\}, \quad X_n^{(n)}(\omega) = \max\big\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big\}.$$

Berechnen sie die Verteilungsfunktion von $X_n^{(1)}$ und jene von $X_n^{(n)}$ und beweisen Sie, dass $X_n^{(1)} \xrightarrow{P} a$ sowie $X_n^{(n)} \xrightarrow{P} b$ gilt.

Satz 12.1 (Teilfolgenprinzip für die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit)
$X, X_1, X_2, \ldots$ seien Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. *$X_n \xrightarrow{P} X$.*
2. *Für jede (!) Teilfolge $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine Teilfolge $(X_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$, die $[P]$ gegen X konvergiert.*