12. Übung am 15. Jänner 2018

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 54 Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 55 Berechnen Sie die charakteristische Funktion von $X \sim \mathcal{U}(-a,a)$ und damit alle Momente $\mathbb{E}(X^k)$ für $k \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 56 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge mit Verteilungsfunktion F, F_n bezeichne die empirische Verteilungsfunktion gemäß Gleichung (7.3). Beweisen Sie (als Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes) das folgende Resultat: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $F(x) \in (0,1)$ und beliebiges $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \sqrt{n}(F_n(x)(\omega) - F(x)) \le z\big\}\Big) = \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}\right)$$

Übungsaufgabe 57 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge mit Verteilungsfunktion F, F_n bezeichne die empirische Verteilungsfunktion gemäß Gleichung (7.3). Zeigen Sie, dass dann auch Y_n, definiert durch

$$Y_n(\omega) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x)(\omega) - F(x)|$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zufallsvariable ist.
Hinweis: Rechtsstetigkeit verwenden.

Übungsaufgabe 58 (Euler'schen Primzahldarstellung der Riemann'schen Zetafunktion) Die Riemann'sche Zeta-Funktion ζ ist für $s \in (1,\infty)$ definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

X sei eine diskrete Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}$ für $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. $\mathcal{P}$ bezeichne die Menge aller Primzahlen, $\mathcal{P}_n$ sei definiert durch $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap [1,n]$. Für jedes $p \in \mathcal{P}$ sei $D_p \in \mathcal{A}$ definiert durch

$$D_p := \{\omega \in \Omega : p \text{ teilt } X(\omega)\}.$$

1. Zeigen Sie $\mathbb{P}(D_p) = \frac{1}{p^s}$.
2. Beweisen Sie, dass die Familie $(D_p)_{p\in\mathcal{P}}$ unabhängig ist.
3. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{p\in\mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

in dem Sie $\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} p\mathbb{N}$ und die Unabhängigkeit der Familie $(D_p^c)_{p\in\mathcal{P}}$ verwenden.