# 13. Übung am 22. Jänner 2018

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

**Übungsaufgabe 59** Sei $(X, Y)$ stetig gleichverteilt am Einheitskreis $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, i.e. $(X, Y)$ ist absolut stetig mit Dichte $f = \mathbf{1}_K$. Warum ist die folgende Vorgangsweise nicht geeignet, um Stichproben von $(X, Y)$ zu erzeugen?

1. Erzeuge eine Stichprobe $r_1, \dots r_n$ von $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
2. Erzeugen eine Stichprobe $\theta_1, \dots \theta_n$ von $\Theta \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$.
3. Setze $x_i := r_i \cos \theta_i$, $y_i := r_i \sin \theta_i$ und betrachte $((x_i, y_i))_{i=1}^n$.

Kann die Vorgangsweise leicht modifiziert werden, sodass sie wirklich Strichproben von $(X, Y) \sim \mu_f$ liefert ?
**(R)** Überprüfen Sie in R, ob die modifizierte Vorgangsweise wirklich die Gleichverteilung am Einheitskreis liefert.

**Übungsaufgabe 60** (i) Konstruieren Sie Zufallsvariable $X, X_1, X_2, \dots$, für die $X_n \xrightarrow{w} X$, aber nicht $X_n \xrightarrow{P} X$ gilt.
(ii*) Geben Sie ein Beispiel für Zufallsvariable $X, X_1, X_2, \dots$ an, für die $X_n \xrightarrow{P} X$ aber nicht $X_n \xrightarrow{[P]} X$ gilt.

**Übungsaufgabe 61** Beweisen Sie Satz 9.4.
Hinweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein Index $n_0$, sodass $|\mathbb{E}(X_n) - a| \leq \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$. Für ein solches $n$ folgt aus $|X_n(\omega) - a| \geq \varepsilon$ auch $|X_n(\omega) - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon/2$.

**Übungsaufgabe 62** Die Verteilungsfunktion $F$ der Zufallsvariable $X$ sei streng monoton wachsend auf $[a, b]$ (mit $a < b$) und erfülle $F(a) = 0, F(b) = 1$. $(X_1, \dots, X_n)$ sei eine Zufallsstichprobe von $X$, und die Zufallsvariable $X_1^{(1)}, X_n^{(n)}$ seien definiert durch

$$X_n^{(1)}(\omega) = \min\big\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big\}, \quad X_n^{(n)}(\omega) = \max\big\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big\}.$$

Berechnen sie die Verteilungsfunktion von $X_n^{(1)}$ und jene von $X_n^{(n)}$ und beweisen Sie, dass $X_n^{(1)} \xrightarrow{P} a$ sowie $X_n^{(n)} \xrightarrow{P} b$ gilt.

**Übungsaufgabe 63** Beweisen Sie die ersten zwei Aussagen des Continuous Mapping Theorems (Satz 9.8) für den Fall, dass $g$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.