

14. Übung am 30. Jänner 2024

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.truttschnig.net/courses mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 67 X_1, X_2, \dots, X_n seien quadratisch integrierbare unabhängige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Weiters sei die $\{1, \dots, n\}$ -wertige Zufallsvariable S am selben Raum definiert, unabhängig zu allen X_i und es gelte $\mathbb{P}(S = i) = p_i \in [0, 1]$.[†] Wir definieren die Zufallsvariable X durch

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{i\}}(S(\omega)) \cdot X_i(\omega).$$

Zeigen Sie, dass X eine Zufallsvariable ist und drücken Sie dann $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{V}(X)$ durch die Erwartungswerte und die Varianzen von X_1, \dots, X_n aus.

Übungsaufgabe 68 Sei X_1, X_2, \dots eine Zufallsstichprobe von $X \sim \text{Pois}(\theta)$ und $\hat{\theta}_n := \bar{X}_n$. In welchem Sinne konvergiert $(\hat{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen θ ? Wäre $\hat{\psi}_n := s_n^2$ ein stark konsistenter Schätzer für θ ? Ist $\hat{\psi}_n^2$ erwartungstreu?

Übungsaufgabe 69 Sei X exponentialverteilt mit Parameter $\theta > 0$ und X_1, \dots, X_n eine Zufallsstichprobe von X . Welche Eigenschaften (Erwartungstreue und Konsistenz) hat der Schätzer $\hat{\theta}_n := \frac{1}{\bar{X}_n}$ von θ ?

Hinweis: Wenn ein Schätzer erwartungstreu ist, dann gilt die Eigenschaft für JEDE sample size n .

Übungsaufgabe 70 Die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariable X sei streng monoton wachsend auf $[a, b]$ (mit $a < b$) und erfülle $F(a) = 0, F(b) = 1$. (X_1, \dots, X_n) sei eine Zufallsstichprobe von X , und die Zufallsvariable $X_1^{(1)}, X_n^{(n)}$ seien definiert durch

$$X_n^{(1)}(\omega) = \min \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}, \quad X_n^{(n)}(\omega) = \max \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}.$$

Berechnen sie die Verteilungsfunktion von $X_n^{(1)}$ und jene von $X_n^{(n)}$ und beweisen Sie, dass $X_n^{(1)} \xrightarrow{P} a$ sowie $X_n^{(n)} \xrightarrow{P} b$ gilt.

[†]und damit automatisch $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.