Fachbereich Mathematik
Universität Salzburg
Assoz.Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig

Salzburg, Oktober 2018
WS 18/19

Übungsblatt 01 zu „Wissenschaftlichem Rechnen“ - R

Aufgabe 1 (**@Problemstellung 1: 50:50 Wahlergebnis, cont.,**).
$2n$ Personen gehen zur Wahl des Bürgermeisters, jeweils genau n Personen wählen einen der beiden Kandidaten. Approximieren Sie durch eine Simulation die Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis: Im Laufe der Auszählung ist der Stimmenabstand zwischen den beiden Kandidaten zu keinem Zeitpunkt grösser als 2. Experimentieren Sie mit verschiedenen Werten für n, beispielsweise 2, 5, 10 und 50.

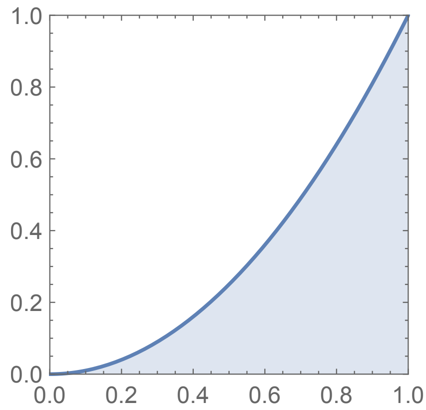
Aufgabe 2 (**@Problemstellung 2: Random walk in $\mathbb{Z}^2$, cont.**).
Wie in der LV starten wir in $X_0 = (0,0)$ und springen mit Wahrscheinlichkeit von jeweils $p = \frac{1}{4}$ entweder um einen Schritt nach rechts, nach oben, nach links oder nach unten. X_1 bezeichne die Position nach dem ersten Sprung, X_i die Position nach dem i-ten Sprung. Berechnen Sie mit Hilfe von Simulationen approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie innerhalb der ersten n Schritte mindestens ein Mal nach $(0,0)$ zurückkehren. Mit anderen Worten, gesucht ist:

$$\mathbb{P}\big(X_i = X_0 \text{ für ein } i \in \{1, 2, \dots, n\}\big)$$

Betrachten Sie insbesondere die Fälle $n = 2, 4, 10, 50, 100, 1000$.

Aufgabe 3 (**@Problemstellung 2: Random walk in $\mathbb{Z}^2$, cont.**).
Wir betrachten den eindimensionalen, in $X_0 = 0$ startenden Random Walk in $\mathbb{Z}$, von dem sich beweisen lässt, dass er mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft nach 0 zurückkehrt. Die Wartezeit Z sei definiert durch $Z := \min\{i \in \mathbb{N} : X_i = X_0\}$. Versuchen Sie, den Erwartungswert von Z approximativ zu berechnen, in dem Sie für eine hinreichend grosse Stichprobe $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ den Mittelwert $\overline{Z}_n$ berechnen (und selbigen als Schätzer von $\mathbb{E}(Z)$ verwenden).

Aufgabe 4 (**Fläche unter einer Kurve**).
Approximieren Sie durch eine R-Simulation die Fläche unter der Einheitsparabel (Graph der Funktion $f : x \mapsto x^2$ auf dem Intervall $[0, 1]$, siehe Skizze).



Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Nehmen Sie N gleichmäßig verteilte Punkte im Einheitsquadrat $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ an. Sei K die Anzahl derjenigen Punkte, deren Koordinaten die Bedingung $x^2 - y \geq 0$ erfüllen. Begründen Sie anschaulich, dass

$$h := \frac{K}{N}$$

eine Näherung für den gesuchten Flächeninhalt ist.

(b) Setzen Sie die Erkenntnis aus (a) in eine Simulation um und berechnen Sie damit einen Näherungswert für den Flächeninhalt.
Hinweis: Um k gleichverteilte Zufallszahlen aus dem Intervall $[0,1]$ zu erzeugen, können Sie den R-Befehl `runif` verwenden. Lassen Sie sich vom folgenden Code inspirieren, der 1000 Zufallszahlen zwischen 0 und 1 erzeugt und dann zählt, wie viele davon kleiner als 0.1 sind:

```
N <- 1000
x <- runif(N, min=0, max=1) # N Zufallszahlen zwischen 0 und 1 erzeugen
a <- rep(0, N)  # Speicherplatz fuer die gewuenschte Eigenschaft reservieren
for (i in 1:N) {
  if (x[i] < 0.1) {  # Falls die i-te Zahl die gewuenschte Eigenschaft hat ...
    a[i] <- 1        # ... markiere sie im Ergebnisvektor
  }
}
sum(a)  # Anzahl der Elemente mit der gewuenschten Eigenschaft
```

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt unter der Einheitsparabel auf analytischem Weg und vergleichen Sie mit dem Ergebnis der Simulation.