

Übungsblatt 01 zu „Wissenschaftlichem Rechnen“ - R

Aufgabe 1 (@Problemstellung 1: 50:50 Wahlergebnis, cont.).

$2n$ Personen gehen zur Wahl des Bürgermeisters, jeweils genau n Personen wählen einen der beiden Kandidaten. Approximieren Sie durch eine Simulation die Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis: Im Laufe der Auszählung ist der Stimmenabstand zwischen den beiden Kandidaten zu keinem Zeitpunkt grösser als 2. Experimentieren Sie mit verschiedenen Werten für n , beispielsweise 2, 5, 10 und 50.

Aufgabe 2 (@Problemstellung 2: Random walk in \mathbb{Z}^2 , cont.).

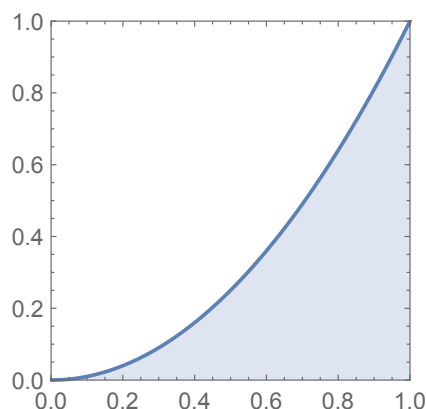
Wie in der LV starten wir in $X_0 = (0, 0)$ und springen mit Wahrscheinlichkeit von jeweils $p = \frac{1}{4}$ entweder um einen Schritt nach rechts, nach oben, nach links oder nach unten. X_1 bezeichne die Position nach dem ersten Sprung, X_i die Position nach dem i -ten Sprung. Berechnen Sie mit Hilfe von Simulationen approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie innerhalb der ersten n Schritte mindestens ein Mal nach $(0, 0)$ zurückkehren. Mit anderen Worten, gesucht ist:

$$\mathbb{P}(X_i = X_0 \text{ für ein } i \in \{1, 2, \dots, n\})$$

Betrachten Sie insbesondere die Fälle $n = 2, 4, 10, 50, 100, 1000$.

Aufgabe 3 (Fläche unter einer Kurve).

Approximieren Sie durch eine R-Simulation die Fläche unter der Einheitsparabel (Graph der Funktion $f : x \mapsto x^2$ auf dem Intervall $[0, 1]$, siehe Skizze).



Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) Nehmen Sie N gleichmäßig verteilte Punkte im Einheitsquadrat $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ an. Sei K die Anzahl derjenigen Punkte, deren Koordinaten die Bedingung $x^2 - y \geq 0$ erfüllen. Begründen Sie anschaulich, dass

$$h := \frac{K}{N}$$

eine Näherung für den gesuchten Flächeninhalt ist.

- (b) Setzen Sie die Erkenntnis aus (a) in eine Simulation um und berechnen Sie damit einen Näherungswert für den Flächeninhalt.

Hinweis: Um k gleichverteilte Zufallszahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ zu erzeugen, können Sie den R-Befehl `runif` verwenden. Lassen Sie sich vom folgenden Code inspirieren, der 1000 Zufallszahlen zwischen 0 und 1 erzeugt und dann zählt, wie viele davon kleiner als 0.1 sind:

```
1 N <- 1000
2 x <- runif(N, min=0, max=1) # N Zufallszahlen zwischen 0 und
  1 erzeugen
3 a <- rep(0, N) # Speicherplatz fuer die gewuenschte
  Eigenschaft reservieren
4 for (i in 1:N) {
5   if (x[i] < 0.1) { # Falls die i-te Zahl die gewuenschte
  Eigenschaft hat ...
6     a[i] <- 1 # ... markiere sie im Ergebnisvektor
7   }
8 }
9 sum(a) # Anzahl der Elemente mit der gewuenschten Eigenschaft
```

- (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt unter der Einheitsparabel auf analytischem Weg und vergleichen Sie mit dem Ergebnis der Simulation.