

Rohversion Skriptum (Vers. 2021-10) zur Vorlesung

Fraktale und Zufall

Univ.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig

www.trutschnig.net

Fachbereich Mathematik

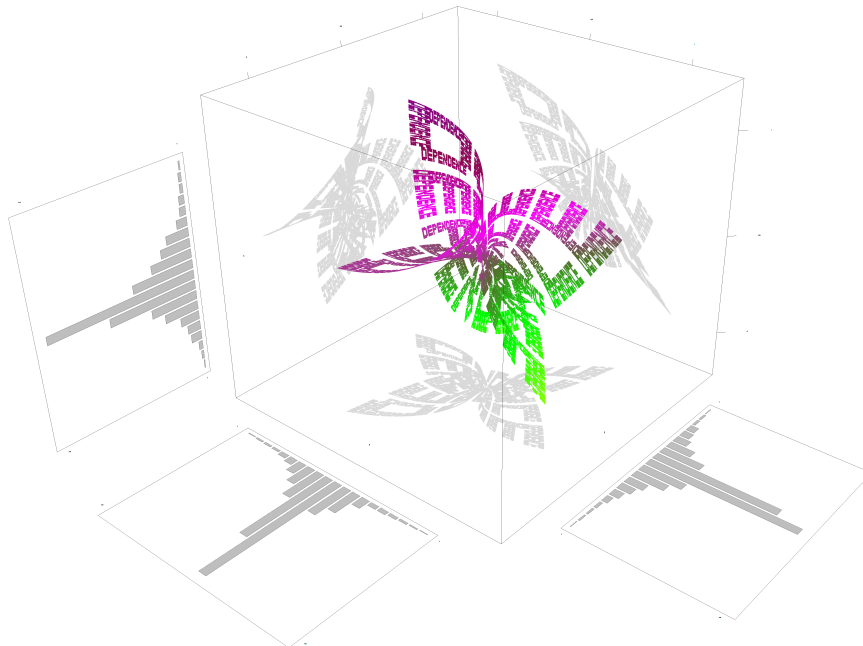
Paris Lodron Universität Salzburg

Hellbrunner Strasse 34

A-5020 Salzburg

basierend auf der 2014er Mitschrift von

M. Happ, F. Kellner, P. Langthaler, H. Ulrich, R. Wellmann



Inhaltsverzeichnis

0	Worum geht's?	3
1	Hausdorff-Metrik und Hyperspace $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$	4
2	Iterierte Funktionensysteme (IFS)	12
2.1	IFS	12
3	Codespace und Adress Map	17
3.1	Motivation und Eigenschaften des Codespace Σ_N	17
3.2	Adress Map und ihre Eigenschaften	19
3.3	Exkurs @Diskrete Dynamische Systeme	23
	Literatur	??

Kapitel 0

Worum geht's?

Vor dem Lesen des Skriptums empfiehlt es sich, einen Blick auf die die Vorlesung motivierenden Slides zu werfen, siehe Motivation.Fraktale.pdf

Hauptziel der Vorlesung ist es zu klären, warum das Chaos Game (=roter Faden der Lehrveranstaltung) 'funktioniert', warum also bei einem zufälligen Prozess - noch dazu bei der Wahl unterschiedlicher Wahrscheinlichkeiten - immer dieselbe deterministische Struktur (Attraktor, oftmals Fraktal) zum Vorschein kommt. Der Ergodensatz für das Chaos Game (a.k.a. Satz von Elton) klärt genau diese Frage und lässt sich im betrachteten Setting (orts-unabhängiger Auswahlwahrscheinlichkeiten) auch elegant beweisen.

Motiviert vom Chaos Game wird in der Vorlesung zuerst ein Abstandsbegriff für kompakte, nichtleere Mengen $\mathcal{K}(\Omega)$ - die sog. Hausdorff Metrik δ_H - studiert und dann gezeigt, dass der von einem Iterierten Funktionensystem (IFS) induzierte Hutchinson Operator (a.k.a. Collage Operator) eine Kontraktion bezügl. δ_H ist. Unter Verwendung der Vollständigkeit von $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ folgt daraus sofort die Existenz eines eindeutigen (global attraktiven) Fixpunkts A^* , dem sog. Attraktor, der oftmals fraktale Struktur hat.

In vollkommener Analogie wird dann der 'stochastische' Weg zum Attraktor behandelt: Ein Iteriertes Funktionensystem mit Wahrscheinlichkeiten (IFSP) induziert einen sog. Markov Operator im Raum $\mathcal{P}(\Omega)$ der Wahrscheinlichkeitsmaße, der bezügl. einer geeigneten Metrik eine Kontraktion ist. Es existiert daher ein eindeutiges invarianten Maß μ^* , dessen Träger genau A^* ist. Basierend auf dieser Eigenschaft und dem Zusammenhang mit symbolischen dynamischen Systemen wird schließlich der Ergodensatz bewiesen.

Ein kurzer Zwischenabschnitt über chaotische dynamische Systeme vervollständigt die Vorlesung.

Kapitel 1

Hausdorff-Metrik und Hyperspace ($\mathcal{K}(\Omega), \delta_H$)

Generalvoraussetzung 1.1. Falls nicht anders erwähnt bezeichnet im Folgenden (Ω, d) immer einen vollständigen metrischen Raum.

Definition 1.2. Die Familie $\mathcal{K}(\Omega)$, definiert

$$\mathcal{K}(\Omega) := \{K \subseteq \Omega : K \text{ kompakt und nicht leer}\}$$

heißt *Hyperspace*.

Als ersten Schritt überlegen wir uns, wie wir einen sinnvollen Abstandsbegriff auf $\mathcal{K}(\Omega)$ konstruieren können und starten mit dem einfachen Fall von Intervallen in $\Omega = \mathbb{R}$, mit d bezeichnen wir die übliche Euklidische Metrik d_2 : Der Abstand von einem Punkt x zu einem Intervall I ist üblicherweise definiert durch $d(x, I) = \inf_{y \in I} d(x, y)$. Sind $[\underline{a}, \bar{a}]$ und $[\underline{b}, \bar{b}]$ Intervalle in \mathbb{R} , so könnte (Skizze!)

$$d([\underline{a}_1, \bar{b}_1], [\underline{a}_2, \bar{b}_2]) := \sup_{x \in [\underline{a}, \bar{a}]} \inf_{y \in [\underline{a}, \bar{a}]} d(x, y)$$

einen intuitiv sinnvollen Abstandsbegriff liefern.

Definition 1.3. Für $A, B \in \mathcal{K}(\Omega)$ ist $d(A, B)$ definiert durch

$$d(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y). \quad (1.1)$$

Es ist leicht einzusehen, dass dieser Abstandsbegriff nicht symmetrisch ist (warum?) und daher keine Metrik sein kann - Symmetrie lässt sich aber leicht erreichen (Abbildung 1 veranschaulicht die Definition von δ_H^\dagger):

Definition 1.4. Die Hausdorff-Metrik $\delta_H : \mathcal{K}(\Omega) \times \mathcal{K}(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ ist definiert durch

$$\delta_H(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\} \quad (1.2)$$

Nachdem kompakte Mengen beschränkt sind (warum?), gilt tatsächlich $0 \leq \delta_H(A, B) < \infty$. Im folgenden Lemma überlegen wir uns, dass wir aufgrund der Kompaktheit der betrachteten Menge Supremum und Infimum in Gleichung (1.1) durch Maximum und Minimum ersetzen können.

[†]Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorff_distance

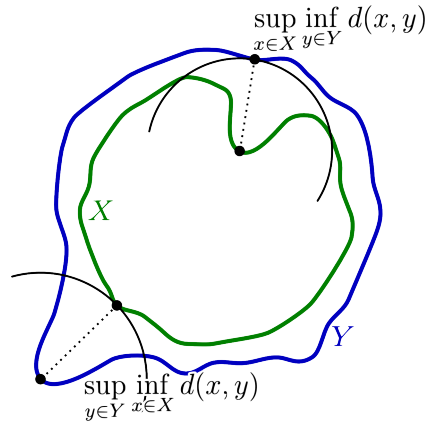


Abbildung 1.1: Illustration der Hausdorff-Metrik für zwei Mengen X (grün) und Y (blau); siehe http://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorff_distance

Lemma 1.5. Für $A, B \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$d(A, B) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} d(x, y).$$

Beweis. Schritt 1: Sei $x \in A$ beliebig aber fest. Wir zeigen, dass es ein $b \in B$ mit

$$d(x, b) = \inf_{y \in B} d(x, y) = d(x, B)$$

gibt. Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B mit

$$d(x, b_n) \leq d(x, B) + \frac{1}{n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Kompaktheit von B impliziert die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(b_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $b \in B$. Anwendung der Dreiecksungleichung liefert

$$d(x, b) \leq d(x, b_{n_j}) + d(b_{n_j}, b) \leq d(x, B) + \frac{1}{n_j} + d(b_{n_j}, b)$$

woraus für $j \rightarrow \infty$ sofort $d(x, b) \leq d(x, B) \leq d(x, b)$ folgt.

Schritt 2: Definieren wir die Funktion $f : A \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$f(x) = d(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b) = \min_{b \in B} d(x, b).$$

dann ist $f \in Lip_1$, i.e.,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq d(x_1, x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in A$: Tatsächlich impliziert die Dreiecksungleichung für beliebiges $b \in B$ offensichtlich

$$d(x_1, b) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, b),$$

Infimumsbildung liefert daher

$$d(x_1, B) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, B). \quad (1.3)$$

Nachdem

$$d(x_2, B) \leq d(x_1, x_2) + d(x_1, B). \quad (1.4)$$

vollkommen analog folgt, erhalten wir insgesamt

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |d(x_1, B) - d(x_2, B)| \leq d(x_1, x_2)$$

und der Beweis ist komplett, da jede stetige Funktion auf einem Kompaktum ihr Supremum annimmt. \square

δ_H tatsächlich eine Metrik am Hyperspace.

Lemma 1.6. δ_H ist eine Metrik auf $\mathcal{K}(\Omega)$.

Beweis. Wir arbeiten der Reihe nach die Eigenschaften einer Metrik ab: (i) Positivität und Endlichkeit wurde schon vorhin erwähnt.

(ii) Die Äquivalenz $\delta_H(A, B) = 0 \iff A = B$ folgt aus folgender Äquivalenzkette:

$$\begin{aligned} \delta_H(A, B) = 0 &\iff d(A, B) = 0 = d(B, A) \\ &\iff \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b) = 0 = \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(b, a) \\ &\iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A \iff A = B \end{aligned}$$

(iii) Dreiecksungleichung: Seien $A, B, C \in \mathcal{K}(\Omega)$. Gemäß Schritt 2 im Beweis von Lemma 1.5 gilt für alle $a, c \in A$

$$d(a, B) \leq d(a, c) + d(c, B)$$

Infimumsbildung über $c \in C$ liefert daher (warum steht am Ende der ersten Zeile kein inf?)

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq \inf_{c \in C} \{d(a, c) + d(c, B)\} \leq \inf_{c \in C} \{d(a, c)\} + \sup_{c \in C} \{d(c, B)\} \\ &= d(a, C) + \sup_{c \in C} \{d(c, B)\} \\ &= d(a, C) + d(C, B) \end{aligned}$$

Via Maximumsbildung über $a \in A$ folgt daher

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

Nachdem sich

$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A),$$

vollkommen analog zeigen lässt, erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \delta_H(A, B) &= \max \{d(A, B), d(B, A)\} \\ &\leq \max \{d(A, C) + d(C, B), d(B, C) + d(C, A)\} \\ &\leq \max \{d(A, C), d(C, A)\} + \max \{d(C, B), d(B, C)\} \\ &= \delta_H(A, C) + \delta_H(B, C), \end{aligned}$$

und der Beweis ist komplett. \square

Die Hausdorff-Metrik lässt sich alternativ auch über sog. ϵ -Umgebung (a.k.a. ϵ -Hüllen) definieren. Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen: Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} d(A, B) \leq \epsilon &\iff \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b) \leq \epsilon \\ &\iff \forall a \in A : d(a, B) \leq \epsilon \\ &\iff \forall a \in A : \exists b \in B : d(a, b) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Definieren wir die *abgeschlossene ϵ -Umgebung* $\bar{U}(B, \epsilon)$ von B als

$$\bar{U}(B, \epsilon) := \{x \in \Omega : \exists b \in B \text{ mit } d(x, b) \leq \epsilon\}.$$

dann gilt daher offensichtlich die folgende Äquivalenz:

$$d(A, B) \leq \epsilon \iff A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon). \quad (1.5)$$

Es scheint daher naheliegend, wie folgt δ_H alternativ zu definieren:

Definition 1.7. Für $A, B \in \mathcal{K}(\Omega)$ ist $\delta'(A, B)$ definiert durch

$$\delta'(A, B) := \inf \{\epsilon > 0 : A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon) \text{ und } B \subseteq \bar{U}(A, \epsilon)\}. \quad (1.6)$$

Wir zeigen, dass das Infimum in Gleichung (1.6) angenommen wird und folgern dann, dass δ' und δ_H identisch sind:

Lemma 1.8. Das Infimum in Gleichung (1.6) wird angenommen, i.e., für alle $A, B \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\delta'(A, B) = \min \{\epsilon > 0 : A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon) \text{ und } B \subseteq \bar{U}(A, \epsilon)\}.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für $\epsilon := \delta'(A, B)$ beide Inklusionen $A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon)$ und $B \subseteq \bar{U}(A, \epsilon)$ erfüllt sind. Nach Definition des Infimums existiert eine Folge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\epsilon_n \rightarrow \epsilon$ und $A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon_n)$ sowie $B \subseteq \bar{U}(A, \epsilon_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $a \in A$ fest. Dann gibt es eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B mit

$$d(a, b_n) \leq \epsilon_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Kompaktheit B impliziert die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(b_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $b \in B$, wir erhalten daher

$$d(a, b) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(a, b_{n_j}) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \epsilon_{n_j} = \epsilon.$$

Für jedes $a \in A$ gilt daher $d(a, B) \leq \epsilon$, woraus sofort $A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon)$ folgt. Die Eigenschaft $B \subseteq \bar{U}(A, \epsilon)$ lässt sich vollkommen analog zeigen. \square

Satz 1.9. δ' und δ_H sind identisch, i.e., für beliebige $A, B \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\delta_H(A, B) = \delta'(A, B). \quad (1.7)$$

Beweis. Direkte Folgerung aus Gleichung (1.5) und Lemma 1.8. \square

Frage 1.10. Gilt für $A \in \mathcal{K}(\Omega)$ und $r > 0$ auch $\bar{U}(A, r) \in \mathcal{K}(\Omega)$?

Lemma 1.11. Für alle $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\delta_H(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max\{\delta_H(A_1, B_1), \delta_H(A_2, B_2)\} \quad (1.8)$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$d(A_1 \cup A_2, B) = \max_{a \in A_1 \cup A_2} d(a, B) = \max\{d(A_1, B), d(A_2, B)\}$$

sowie

$$d(a, B_1 \cup B_2) = \min_{b \in B_1 \cup B_2} d(a, b) = \min\{d(a, B_1), d(a, B_2)\}. \quad (1.9)$$

Wenn wir in Ungleichung (1.9) zum Maximum übergehen, erhalten wir

$$d(A, B_1 \cup B_2) \leq \min\{d(A, B_1), d(A, B_2)\}.$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) &= \max\{d(A_1, B_1 \cup B_2), d(A_2, B_1 \cup B_2)\} \\ &\leq \max\{\min\{d(A_1, B_1), d(A_1, B_2)\}, \min\{d(A_2, B_1), d(A_2, B_2)\}\} \\ &\leq \max\{d(A_1, B_1), d(A_2, B_2)\} \\ &\leq \max\{d(A_1, B_1), d(B_1, A_1), d(A_2, B_2), d(B_2, A_2)\} \\ &= \max\{\delta_H(A_1, B_1), \delta_H(A_2, B_2)\}. \end{aligned}$$

Die Ungleichung für $d(B_1 \cup B_2, A_1 \cup A_2)$ folgt analog. \square

Satz 1.12. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\delta_H\left(\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcup_{i=1}^n B_i\right) \leq \max\{\delta_H(A_1, B_1), \dots, \delta_H(A_n, B_n)\}. \quad (1.10)$$

Satz 1.13. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge in $\mathcal{K}(\Omega)$. Dann konvergiert $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der

Hausdorff Metrik δ_H gegen $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Beweis. Wir zeigen zuerst $A \in \mathcal{K}(\Omega)$. A ist als Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen selbst abgeschlossen und als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $A_1 \in \mathcal{K}(\Omega)$ selbst kompakt. Angenommen $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ wäre leer. Dann folgt sofort

$$A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \Omega \supseteq A_1,$$

die kompakte Menge A_1 wird also überdeckt von der Familie $(A_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ von offenen (nicht-fallenden) Mengen. Kompaktheit von A_1 impliziert daher die Existenz einer endliche Teilüberdeckung, i.e.,

$$\exists M \in \mathbb{N} : \bigcup_{n=1}^M A_n^c \supseteq A_1 \supseteq A_M.$$

Wegen $\bigcup_{n=1}^M A_n^c = A_M^c$ folgt damit $A_M^c \supseteq A_M$, Widerspruch.

Als zweiten Schritt zeigen wir $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_H(A_n, A) = 0$. Nehmen wir indirekt an, dem wäre nicht so, dass also ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_H(A_n, A) \geq \epsilon$$

gilt. Dann existiert also eine Teilfolge $(A_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\delta_H(A_{n_j}, A) \geq \epsilon$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert daher ein $a_{n_j} \in A_{n_j}$ mit $d(a_{n_j}, A) \geq \epsilon$. Nachdem die Folge $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ in A_1 liegt existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{j_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $a \in A_1$. Die Monotonie von $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ impliziert sogar $a \in A_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, i.e., es gilt sogar $a \in A$, Widerspruch, und der Beweis ist komplett. \square

Bemerkung 1.14. Aus den Grundvorlesungen wissen Sie (hoffentlich), dass die folgenden Punkte für einen metrischen Raum (Ω, d) äquivalent sind:

- (Ω, d) ist kompakt.
- Jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.
- Jede Folge hat eine konvergente Teilfolge.
- (Ω, d) ist vollständig und totalbeschränkt.

Dabei heisst (Ω, d) totalbeschränkt, genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ endlich viele Punkte x_1, \dots, x_n existieren, sodass: $\Omega = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$ gilt. Die Punkte x_1, \dots, x_n heißen ϵ -Netz.

Satz 1.15. *Angenommen (Ω, d) ist ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist auch der Hyperspace $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ vollständig.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Cauchy Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ konvergent ist, und werden nicht nur beweisen, dass der Grenzwert A existiert sondern gegeben ist durch

$$A := \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n} \in \mathcal{K}(\Omega).$$

(i) Wir beginnen mit $A \in \mathcal{K}(\Omega)$: Setzen wir $B_m := \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n}$, dann ist $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge abgeschlossener, nichtleerer Mengen. Spätestens seit Bemerkung 1.14 wissen wir, dass B_1 genau dann kompakt ist, wenn B_1 vollständig und totalbeschränkt ist. B_1 ist als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ebenfalls vollständig, es reicht daher, Totalbeschränktheit von B_1 zu zeigen.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig aber fest. Wir wollen zeigen, dass B_1 mit endlich vielen ϵ -Kugeln überdeckt werden kann. Die Cauchy Eigenschaft von $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ impliziert die Existenz eines $m \in \mathbb{N}$ mit $\delta_H(A_n, A_m) \leq \frac{\epsilon}{4}$ für alle $n \geq m$. Daraus folgt $A_n \subseteq \overline{U(A_m, \frac{\epsilon}{4})}$ für jedes $n \geq m$ und wir erhalten insgesamt

$$B_m = \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n} \subseteq \overline{U(A_m, \frac{\epsilon}{4})} \tag{1.11}$$

A_m ist als kompakte Menge totalbeschränkt, es existieren daher $x_1, \dots, x_q \in A_m$ mit

$$A_m \subseteq \bigcup_{i=1}^q B\left(x_i, \frac{\epsilon}{4}\right). \quad (1.12)$$

Durch (etwaige) Umsortierung der x_i können wir erreichen, dass ein $p \leq q$ existiert, sodass $B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap B_m \neq \emptyset$ für jedes $i \leq p$ und $B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap B_m = \emptyset$ für jedes $i > p$. Für alle $i \leq p$ sei $y_i \in B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap B_m$ und es gilt

$$B_m \subseteq \bigcup_{i=1}^p B(y_i, \epsilon)$$

Tatsächlich folgt für beliebiges aber festes $x \in B_m$ via Gleichung (1.11) die Existenz eines $y \in A_m$ mit $d(x, y) \leq \frac{\epsilon}{4}$ und lt. Ungleichung (1.12) finden wir ein x_i mit $d(x_i, y) < \frac{\epsilon}{4}$. Insgesamt erhalten wir

$$d(x, x_i) \leq d(x, y) + d(x_i, y) < \frac{\epsilon}{2}$$

es folgt also insbesondere $i \leq p$. Anwendung der Dreiecksungleichung liefert

$$d(x, y_i) \leq d(x, y) + d(y, x_i) + d(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

es existiert also ein $y_i \in B_m$ mit $d(x, y_i) \leq \epsilon$. Nachdem $x \in B_m$ und $\epsilon > 0$ beliebig waren ist B_m also totalbeschränkt. Wegen

$$B_1 = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{m-1} \cup B_m,$$

ist B_1 als endliche Vereinigung von totalbeschränkten Mengen selbst totalbeschränkt, und damit nach den Vorüberlegungen insgesamt sogar kompakt. Damit ist jedes B_i kompakt und Satz 1.13 liefert $A \in \mathcal{K}(\Omega)$.

(ii) Als zweiten (und finalen) Schritt zeigen wir, dass $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tatsächlich gegen A konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ beliebig aber fest. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\delta_H(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{2}$$

für jedes $n \geq m$. Nachdem für jedes solche $n \geq m$ dann auch $A_n \subseteq \overline{U}\left(A_m, \frac{\epsilon}{2}\right)$ (und umgekehrt) gilt folgt sofort

$$B_m \subseteq \overline{U}\left(A_m, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

und damit

$$A \subseteq \overline{U}\left(A_m, \frac{\epsilon}{2}\right) \subseteq \overline{U}(A_m, \epsilon) \quad (1.13)$$

für jedes $n \geq m$.

Umgekehrt sein $x \in A_n$ mit $n \geq m$ fest. Für jedes $k \geq n$ gilt dann $\delta_H(A_k, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$, es existiert also ein $x_k \in A_k \subseteq B_q$ mit $d(x_k, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Die so erhaltenen Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (die Folgenglieder vor dem n -ten können frei gewählt werden) liegt (ab einem Index) in B_n , die

Kompaktheit von B_n liefert daher die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $z \in B_n$. Nachdem $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ auch ab einem Index in der kompakten Menge B_l mit $l \geq n$ liegt folgt analog $z \in B_l$. Insgesamt erhalten wir $z \in \bigcap_{l \geq n} B_l = A$. Nachdem $x \in A_n$ beliebig war haben wir damit schon $A_n \subseteq \overline{U}(A, \epsilon)$ gezeigt, und die Anwendung von Satz 1.9 beschließt den Beweis. \square

Die Vollständigkeit ist im Folgenden zwar die wichtigste Eigenschaft, die der Hyperspace $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ von (Ω, d) erbt, es ist aber nicht die einzige Eigenschaft:

Satz 1.16. *Sei (Ω, d) kompakt. Dann ist auch $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ kompakt.*

Beweis. Übungsaufgabe \square

Kapitel 2

Iterierte Funktionensysteme (IFS) und der Hutchinson-Operator \mathcal{W}

2.1 IFS

Definition 2.1. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion

$$f : (\Omega, d) \rightarrow (\Omega, d)$$

heißt Kontraktion genau dann, wenn ein $L < 1$ existiert, sodass für alle $x, y \in \Omega$

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$$

gilt. Die Zahl L heißt Kontraktionsfaktor von f .

Definition 2.2. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $N \in \mathbb{N}$. Eine endliche Menge $\{f_1, \dots, f_N\}$ von Kontraktionen heißt Iteriertes Funktionensystem (IFS) und wird mit kurz $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ geschrieben. Bezeichnen L_1, \dots, L_N die Kontraktionsfaktoren der Funktionen f_1, \dots, f_N , dann heißt $L = \max_{i=1, \dots, N} L_i < 1$ der Kontraktionsfaktor des IFS.

Der folgende Operator \mathcal{W} ist uns schon in den einführenden Slides mehrmals begegnet (erinnern Sie sich an die Konstruktion des Sierpinski Dreiecks) und wird in der Literatur auch alternativ oft als ‘Collage’ Operator bezeichnet.

Definition 2.3. Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{W} : \mathcal{K}(\Omega) &\rightarrow \mathcal{K}(\Omega), \\ \mathcal{W}(A) &= \bigcup_{i=1}^N f_i(A) \end{aligned}$$

heißt Hutchinson-Operator.

Beachten Sie, dass das stetige Bild einer kompakten Menge wieder kompakt ist. Nachdem die endliche Vereinigung von kompakten Menge wieder kompakt ist, bildet \mathcal{W} also tatsächlich $\mathcal{K}(\Omega)$ in sich selbst ab.

Satz 2.4. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS. Dann ist der Hutchinson-Operator \mathcal{W} eine Kontraktion auf $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$.

Beweis. Für jedes $i \in \{1, \dots, N\}$ gilt offensichtlich

$$d(f_i(A), f_i(B)) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \underbrace{d(f_i(a), f_i(b))}_{\leq L_i d(a,b) \leq L d(a,b)} \leq L d(A, B) \leq L \delta_H(A, B).$$

Insgesamt erhalten wir daher unter Verwendung von Lemma 1.11

$$\begin{aligned} \delta_H(\mathcal{W}(A), \mathcal{W}(B)) &= \delta_H\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(A), \bigcup_{i=1}^N f_i(B)\right) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, N} \delta_H(f_i(A), f_i(B)) \leq L \delta_H(A, B), \end{aligned}$$

und der Beweis ist komplett. \square

Korollar 2.5. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS. Dann existiert eine eindeutige Menge $A^* \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit

$$\mathcal{W}(A^*) = A^*$$

und für alle $A \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_H(\mathcal{W}^n(A), A^*) = 0.$$

Die Menge A^* heißt den Attraktor des IFS.

Beweis. Nachdem \mathcal{W} eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ ist liefert der Banach'scher Fixpunktsatz sofort die behauptete Existenz eines eindeutigen, global attraktiven Fixpunkts A^* . \square

Bemerkung 2.6. Der Attraktor A^* eines IFS muss nicht immer ein 'Fraktal' sein: Betrachten wir beispielsweise das IFS

$$f_1(x) = \frac{x}{2}, \quad f_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2},$$

dann gilt offensichtlich ist

$$\mathcal{W}([0, 1]) = [0, 1],$$

die Eindeutigkeit des Fixpunkts impliziert daher $A^* = [0, 1]$.

Bemerkung 2.7. Wir betrachten das IFS

$$f_1(x) = \frac{x}{3}, \quad f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3},$$

dessen Attraktor A^* die Cantormenge C^* ist, C^* erfüllt also $f_1(C^*) \cup f_2(C^*) = C^*$. Gibt es noch weitere Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $f_1(A) \cup f_2(A) = A$? Man kann sich leicht überlegen, dass etwa $\emptyset, \mathbb{R}, [0, \infty), \mathbb{Q}$ diese Fixpunktbedingung erfüllen. Dies widerspricht aber in keinsten Weise der Eindeutigkeit des Attraktors, da keine der Mengen nichtleer und kompakt ist.

Das nächste Resultat zeigt, dass falls $\mathcal{W}(B)$ nahe bei B liegt, B auch schon nahe beim Attraktor A^* liegen muss.

Satz 2.8 (Collage-Theorem). *Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS mit Kontraktionsfaktor $L < 1$ und Attraktor $A^* \in \mathcal{K}(\Omega)$. Sei $\epsilon > 0$ und $B \in \mathcal{K}(\Omega)$. Dann folgt aus $\delta_H(B, \mathcal{W}(B)) \leq \epsilon$ die Ungleichung*

$$\delta_H(B, A^*) \leq \frac{\epsilon}{1-L}.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz in einem allgemeineren Setting und betrachten eine Kontraktion g mit Kontraktionsfaktor $L < 1$ auf einem vollständigen metrischen Raum (Ω, d) und eindeutigem (global attraktiven) Fixpunkt x^* . Angenommen, $x \in \Omega$ erfüllt $d(x, g(x)) \leq \epsilon$. Dann impliziert die Dreiecksungleichung offensichtlich

$$\begin{aligned} d(x, x^*) &\leq d(x, g(x)) + d(g(x), x^*) \\ &= d(x, g(x)) + d(g(x), g(x^*)) \\ &\leq \epsilon + L d(x, x^*), \end{aligned}$$

elementares Umformen der Ungleichung liefert $d(x, x^*) \leq \frac{\epsilon}{1-L}$, und damit das gewünschte Resultat. \square

Die folgende Frage ist naheliegend: Wie verändert sich der Attraktor eines IFS, wenn sich das IFS ‘leicht’ verändert? Führen ‘kleine’ Änderungen des IFS zu kleinen Änderungen des Attraktors?

$$\begin{array}{ccc} \{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\} & \approx & \{\Omega, (\hat{f}_i)_{i=1}^N\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^* & \stackrel{?}{\approx} & \hat{A}^* \end{array}$$

Wir werden die Fragen positiv beantworten und arbeiten dabei mit der von der Supremumsmetrik d_∞ induzierten natürlichen Abstandsmessung. Dabei arbeiten wir mit folgenden Mengen:

Definition 2.9. *Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum. Für jedes feste $L < 1$ heisst die Menge*

$$\text{Con}_L(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \Omega \mid \forall x, y \in \Omega : d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)\}$$

die Menge aller Kontraktionen mit Kontraktionsfaktor höchstens L .

Sie wissen auf der Analysis, dass $(\text{Con}_L(\Omega), d_\infty)$ ein vollständiger metrischer Raum ist. Damit ist für jedes $N \in \mathbb{N}$ auch $(\text{Con}_L(\Omega)^N, D_\infty)$ ein vollständiger metrischer Raum, wobei D_∞ definiert ist durch

$$D_\infty(F, G) = \max_{i=1, \dots, N} d_\infty(f_i, g_i),$$

mit $F = (f_1, \dots, f_N) \in \text{Con}_L(\Omega)^N$ und $G = (g_1, \dots, g_N) \in \text{Con}_L(\Omega)^N$.

Satz 2.10. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $N \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : (\text{Con}_L(\Omega)^N, D_\infty) &\longrightarrow (\mathcal{K}(\Omega), \delta_H) \\ \varphi(F) = \varphi(f_1, \dots, f_N) &= A_F^*,\end{aligned}$$

die jedes IFS auf seinen Attraktor abbildet, ist stetig. Das heißt, der Attraktor ändert sich nur ‘leicht’, wenn wir jede Kontraktion im IFS im Sinne von D_∞ nur ‘leicht’ ändern.

Wir beweisen den Satz mit Hilfe des folgenden, einfachen Lemmas:

Lemma 2.11. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f, g : \Omega \rightarrow \text{Con}_L(\Omega)$ Kontraktionen mit eindeutigen Fixpunkten x_f^*, x_g^* . Dann gilt

$$d(x_f^*, x_g^*) \leq \frac{1}{1-L} \sup_{x \in \Omega} d(f(x), g(x)) = \frac{1}{1-L} d_\infty(f, g).$$

Beweis. Anwendung der Dreiecksungleichung im Zusammenspiel mit der Fixpunkteigenschaft liefert

$$\begin{aligned}d(x_f^*, x_g^*) &\leq d(x_f^*, f(x_g^*)) + d(f(x_g^*), x_g^*) \\ &= d(f(x_f^*), f(x_g^*)) + d(f(x_g^*), g(x_g^*)) \\ &\leq L d(x_f^*, x_g^*) + \sup_{x \in \Omega} d(f(x), g(x)),\end{aligned}$$

woraus die gewünschte Ungleichung durch elementares Umformen folgt. \square

Beweis von Satz 2.10. Wir zeigen, dass φ das ϵ - δ -Kriterium erfüllt. Sei $\epsilon > 0$ beliebig, aber fix. Setze $\delta = (1-L)\epsilon$, dann folgt für $F, G \in \text{Con}_L(\Omega)^N$ mit $D_\infty(F, G) \leq \delta$ offensichtlich sofort $d_\infty(f_i, g_i) \leq \delta$ für jedes $i \in \{1, \dots, N\}$. Für $A \in \mathcal{K}(\Omega)$ erhalten wir weiters

$$\begin{aligned}\delta_H(\mathcal{W}_F(A), \mathcal{W}_G(A)) &= \delta_H\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(A), \bigcup_{i=1}^N g_i(A)\right) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, N} \delta_H(f_i(A), g_i(A)) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, N} d_\infty(f_i, g_i) \leq \delta,\end{aligned}$$

und damit auch

$$\sup_{A \in \mathcal{K}(\Omega)} \delta_H(\mathcal{W}_F(A), \mathcal{W}_G(A)) \leq \delta.$$

Anwendung von Lemma 2.11 liefert sofort

$$\begin{aligned}\delta_H(\varphi(F), \varphi(G)) = \delta_H(A_F^*, A_G^*) &\leq \frac{1}{1-L} \sup_{A \in \mathcal{K}(\Omega)} \delta_H(\mathcal{W}_F(A), \mathcal{W}_G(A)) \\ &\leq \frac{1}{1-L} \delta = \epsilon,\end{aligned}$$

und der Beweis ist komplett. \square

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem konkreten Beispiel, das Satz 2.10 veranschaulicht:

Beispiel 2.12. Für jedes $t \in [0, 2]$ betrachten wir das IFS $\{\mathbb{R}^2, (f_i^t)_{i=1}^2\}$ mit

$$f_1^t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und

$$f_2^t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{3\pi}{4} - \pi t) & \sin(\frac{3\pi}{4} - \pi t) \\ -\sin(\frac{3\pi}{4} - \pi t) & \cos(\frac{3\pi}{4} - \pi t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix},$$

das offensichtlich Kontraktionsfaktor $L = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ hat. Nachdem Sinus und Cosinus Lipschitzstetig sind folgt sofort, dass die Abbildung $\psi : [0, 2] \rightarrow \text{Con}_L^2$, definiert durch

$$\psi(t) = (f_1^t, f_2^t)$$

stetig bezüglich D_∞ ist. Satz 2.10 impliziert daher unmittelbar die Stetigkeit der Abbildung $\varphi \circ \psi : [0, 2] \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, die jedem $t \in [0, 2]$ den Attraktor $A_t^* \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ des IFS $\{\mathbb{R}^2, (f_i^t)_{i=1}^2\}$ zuordnet, bezüglich δ_H . Mit anderen Worten: Kleine Änderungen von $t \in [0, 2]$ führen zu kleinen Änderungen von $A_t^* = \varphi \circ \psi(t)$.

Obwohl die betrachtete parametrische Familie von IFSen nur IFS mit jeweils 2 Kontraktionen enthält, ergeben sich für A_t^* überraschend komplexe und heterogene Formen, inkl. baumartiger und drachenartiger Mengen. Für $t = 1.81$ ist A_t^* in Abbildung 2.1 skizziert. Die volle Palette von Formen für ein äquidistantes Gitter von 200 Werte aus $[0, 2]$ ist in dem unter diesem Link abrufbaren Video dargestellt.

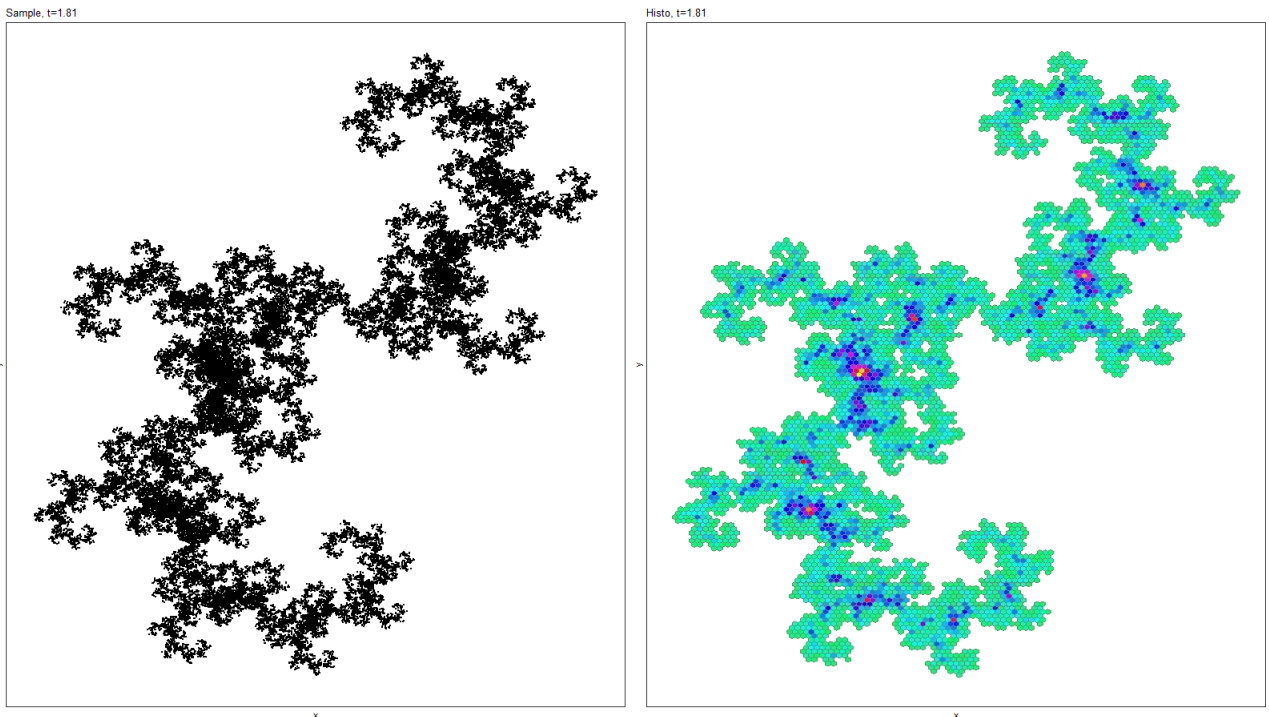


Abbildung 2.1: Der Attraktor A_t^* von dem in Beispiel 2.12 betrachteten IFS $\{\mathbb{R}^2, (f_i^t)_{i=1}^2\}$ mit $t = 1.81$

Kapitel 3

Codespace und Adress Map

3.1 Motivation und Eigenschaften des Codespace Σ_N

Wir betrachten abermals das IFS $\{\mathbb{R}^2, (f_i)_{i=1}^3\}$, das das Sierpinski Dreieck induziert. Dann gilt wegen $\mathcal{W}(A^*) = A^*$ offensichtlich $f_i(A^*) \subseteq A^*$ sowie $\text{diam}(f_i(A^*)) = \frac{1}{2}\text{diam}(A^*)$ für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$. Für $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3\}$ folgt analog

$$f_{k_1} \circ f_{k_2}(A^*) \subseteq f_{k_1}(A^*) \subseteq A^*.$$

Weitergedacht bedeutet dies, dass für jede Folge $\underline{k} = (k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} =: \Sigma_3$ die Folge

$$(f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(A^*))_{n \in \mathbb{N}}$$

eine fallende Folge kompakter Mengen, deren Durchmesser gegen 0 konvergiert, ist. Das IFS liefert also für jedes $\underline{k} \in \Sigma_3$ eine Folge, die an die Intervallschachtelung aus der Analysis erinnert, von der Sie wissen, dass es genau einen Punkt gibt, der im Durchschnitt liegt. Naheliegenderweise vermuten wir daher, dass auch die Menge

$$M_{\underline{k}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(A^*) \tag{3.1}$$

eine einpunktige Teilmenge von A^* ist. Wenn dem so wäre, hätten wir eine Abbildung G von $\Sigma_3^{\mathbb{N}}$ in A^* konstruiert. Im Falle der Cantor Menge haben Sie diese Abbildung vermutlich schon kennengelernt da Sie das Standardwerkzeug ist um zu zeigen, dass die Cantormenge überabzählbar ist.

Tatsächlich ist es so, dass obigen Konstruktion für beliebige IFS funktioniert. Bevor wir die Abbildung G allgemein definieren und ihre Eigenschaften studieren, werfen wir einen Blick auf den sog. Codespace Σ_N , der der Schlüssel zu vielen den nachfolgenden Resultaten ist.

Definition 3.1. Sei $N \in \mathbb{N}$. Die Menge

$$\Sigma_N = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} = \{\underline{k} = (k_1, k_2, k_3, \dots) : k_i \in \{1, \dots, N\}\}$$

heißt Codespace mit N Symbolen. Die Metrik ρ auf Σ_N ist definiert durch

$$\rho(\underline{k}, \underline{l}) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \underline{k} = \underline{l}, \\ 2^{1 - \min_{i \in \mathbb{N}} \{i : k_i \neq l_i\}} & \text{wenn } \underline{k} \neq \underline{l}. \end{cases}$$

ρ ist nicht nur eine Metrik, sondern sogar eine sog. Ultrametrik:

Definition 3.2. Eine Metrik d auf Ω heisst Ultrametrik genau dann, wenn sie die folgende stärkere Version der Dreiecksungleichung für alle $x, y, z \in \Omega$ erfüllt:

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \quad (3.2)$$

Lemma 3.3. ρ ist eine Ultrametrik auf Σ_N .

Beweis. Beachten Sie als erstes, dass für $\underline{k}, \underline{l} \in \Sigma_N$ und $i_0 \in \mathbb{N}$ die folgende Äquivalenz gilt: $\rho(\underline{k}, \underline{l}) \leq 2^{1-i_0}$ genau dann, wenn mindestens die ersten $i_0 - 1$ Stellen von \underline{k} und \underline{l} gleich sind. Für $\underline{k}, \underline{l}, \underline{m} \in \Sigma_N$ mit $\max\{\rho(\underline{k}, \underline{m}), \rho(\underline{m}, \underline{l})\} = 2^{1-i_0}$ folgt daher für $i_0 \geq 2$ sofort, dass die ersten $i_0 - 1$ Stellen von \underline{k} und \underline{m} sowie von \underline{m} und \underline{l} übereinstimmen. Daher stimmen auch die ersten $i_0 - 1$ Stellen von \underline{k} und \underline{l} überein und wir erhalten $\rho(\underline{k}, \underline{l}) \leq 2^{1-i_0}$. Für $i_0 = 1$ ist Ungleichung (3.2) offensichtlich erfüllt, da ρ nur Werte in $[0, 1]$ annimmt. Insgesamt erfüllt ρ daher die stärkere Dreiecksungleichung. Nachdem ρ die verbleibenden Eigenschaften einer Metrik trivialerweise erfüllt ist der Beweis komplett. \square

Eine weitere, häufig betrachtete Metrik auf Σ_N ist gegeben durch

$$\rho_1(\underline{k}, \underline{l}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|k_i - l_i|}{N^i}. \quad (3.3)$$

Nachzurechnen, dass ρ_1 ebenfalls eine Metrik (aber keine Ultrametrik) auf Σ_N ist, ist eine einfache Übungsaufgabe.

Die Metriken ρ und ρ_1 erzeugen die Produkttopologie auf Σ_N , i.e., es gilt das folgende Resultat:

Lemma 3.4. Für jedes feste $N \in \mathbb{N}$ und $\underline{k}, \underline{k}^1, \underline{k}^2, \dots \in \Sigma_N$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

1. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} |k_i^n - k_i| = 0$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\underline{k}^n, \underline{k}) = 0$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(\underline{k}^n, \underline{k}) = 0$.

Beide Metriken ρ und ρ_1 erzeugen daher die Produkttopologie auf Σ_N , die resultierenden metrischen Räume (Σ_N, ρ) und (Σ_N, ρ_1) sind kompakt.

Beweis. Zu zeigen, dass die obigen drei Aussagen äquivalent sind (und damit beide Metriken ρ und ρ_1 die Produkttopologie erzeugen), ist eine gute Übungsaufgabe. Nachdem $\{1, \dots, N\}$ als endliche Teilmenge von \mathbb{R} kompakt ist, ist Σ_N versehen mit der Produkttopologie nach dem Satz von Tychonoff kompakt und das Lemma ist bewiesen. \square

Bevor wir zu IFSen und der Abbildung G zurückkehren leiten wir noch einige (auf den ersten Blick überraschende und wenig intuitive) Eigenschaften von Ultrametrien her.

Lemma 3.5. In jedem ultrametrischen Raum (Ω, d) gelten die folgenden Eigenschaften:

1. Sei $a \in \Omega$ und $r > 0$. Dann gilt für jedes $x \in B(a, r)$ die Gleichheit $B(a, r) = B(x, r)$.
[Jeder Punkt einer Kugel ist Mittelpunkt.]

2. Der Durchmesser $\text{diam}(B(x, r))$ einer offenen Kugel $B(x, r)$ mit Radius r ist r .
3. Jede offene Kugel ist auch abgeschlossen. [Jede offene Kugel ist ‘clopen’...closed and open].

Beweis. (1): Sei $x \in B(a, r)$ beliebig. Dann gilt für jedes $y \in B(a, r)$ offensichtlich

$$d(y, x) \leq \max\{\underbrace{d(y, a)}_{< r}, \underbrace{d(a, x)}_{< r}\} < r,$$

also $y \in B(x, r)$ und damit $B(a, r) \subseteq B(x, r)$. Umgekehrt gilt für jedes $y \in B(x, r)$

$$d(y, a) \leq \max\{\underbrace{d(y, x)}_{< r}, \underbrace{d(x, a)}_{< r}\} < r,$$

also $y \in B(a, r)$ und damit $B(x, r) \subseteq B(a, r)$.

(2): Direkte Konsequenz aus der starken Dreiecksungleichung (3.2).

(3): Sei $a \in \Omega$ und $r > 0$. Wir zeigen, dass $B(a, r)^c$ offen ist, dass also jeder Punkt y von $B(x, r)^c$ ein innerer Punkt ist. Tatsächlich gilt für $y \in B(x, r)^c$ sogar $B(y, r) \subseteq B(a, r)^c$: Wäre nämlich $B(y, r) \cap B(a, r) \neq \emptyset$ dann würde ein $x \in B(y, r) \cap B(a, r)$ existieren, und die Aussage 1) würde sofort $B(x, r) = B(y, r) = B(a, r)$, und damit $d(y, a) < r$ liefern, Widerspruch. $B(a, r)^c$ ist also offen, $(B(a, r)^c)^c = B(a, r)$ daher abgeschlossen. \square

3.2 Adress Map und ihre Eigenschaften

Wir kehren nun zu den Mengen der Form (3.1) und beweisen das folgende, einfache Resultat:

Lemma 3.6. Sei (Ω, d) vollständig und $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS mit Attraktor A^* . Dann ist für jedes $\underline{k} \in \Sigma_N$ die Menge $M_{\underline{k}}$, definiert durch

$$M_{\underline{k}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ f_{k_3} \circ \cdots \circ f_{k_n}(A^*)$$

einpunktig und es gilt $M_{\underline{k}} \subseteq A^*$.

Beweis. Wir wissen schon aus den Vorüberlegungen, dass die Folge $(f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(A^*))_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge kompakter Mengen ist. Wegen

$$\text{diam}(f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(A^*)) \leq L^n \underbrace{\text{diam}(A^*)}_{< \infty}$$

enthält $M_{\underline{k}}$ einerseits höchstens einen Punkt. Andererseits liefert Satz 1.13 sofort $M_{\underline{k}} \neq \emptyset$, die Menge $M_{\underline{k}}$ ist daher, wie behauptet, einpunktig. \square

Das folgende wichtige Resultat zeigt, dass die zuvor schon angedeutete Funktion $G : \Sigma_N \rightarrow A^*$ auch alternativ mit nur einem Punkt (der nicht einmal in A^* liegen muss) als Startmenge definiert werden kann.

Lemma 3.7. *Gegeben sei ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$, weiters sei $z \in \Omega$ beliebig, aber fest. Dann ist durch*

$$G^z(\underline{k}) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ f_{k_3} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z)$$

eine Abbildung $G^z : \Sigma_N \rightarrow \Omega$ definiert. Für beliebige $y, z \in \Omega$ und jedes $\underline{k} \in \Sigma_N$ gilt $G^z(\underline{k}) = G^y(\underline{k})$, die Abbildung ist also unabhängig von der konkreten Wahl des Startpunkts z .

Beweis. Wir beweisen das Lemma in drei Schritten:

Schritt 1: Wir zeigen, für jedes $\underline{l} \in \Sigma_N$ ist die Menge

$$\{f_{l_1} \circ f_{l_2} \circ \cdots \circ f_{l_n}(z) : n \in \mathbb{N}\}$$

beschränkt. Wegen $\{z\} \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_H(\mathcal{W}^n(\{z\}), A^*) = 0,$$

es existiert daher ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{W}^n(\{z\}) \subseteq \overline{U}(A^*, 1)$ für jedes $n \geq n_0$. Daher folgt, dass für jedes $n \geq n_0$ auch

$$f_{l_1} \circ f_{l_2} \circ \cdots \circ f_{l_n}(z) \in \mathcal{W}^n(\{z\}) \subseteq \overline{U}(A^*, 1)$$

gilt, die Menge $\{f_{l_1} \circ f_{l_2} \circ \cdots \circ f_{l_n}(z) : n \in \mathbb{N}\}$ ist also beschränkt.

Schritt 2: Für jedes $\underline{k} \in \Sigma_N$ und $z \in \Omega$ ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_n := f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z)$$

eine Cauchy-Folge. Tatsächlich gilt offensichtlich für jedes $m > n$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d\left(f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z), f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n} \circ f_{k_{n+1}} \circ \cdots \circ f_{k_m}(z)\right) \\ &\leq L^{n-1} d\left(f_{k_n}(z), f_{k_n} \circ f_{k_{n+1}} \circ \cdots \circ f_{k_m}(z)\right) \\ &\leq L^{n-1} \text{diam}(\{f_{l_1} \circ \cdots \circ f_{l_n}(z) : n \in \mathbb{N}\}). \end{aligned}$$

Gemäß Schritt 1 konvergiert der letzte Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert daher ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Mit anderen Worten: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Die Vollständigkeit von Ω liefert daher die Existenz eines eindeutigen Grenzwerts $x \in \Omega$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f_{k_1} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z)) = 0.$$

Schritt 3: Gelte $z \neq y \in \Omega$. Dann folgt unter Anwendung der Kontraktionseigenschaft sofort

$$d(f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(y), f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z)) \leq L^n d(y, z).$$

Nachdem die rechts Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert folgt unter Verwendung von Schritt 2 sofort

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(y),$$

und der Beweis ist komplett. \square

Definition 3.8. Gegeben sei ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$. Dann heisst die durch ($z \in \Omega$ beliebig)

$$G(\underline{k}) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z)$$

definierte Abbildung $G : \Sigma_N \rightarrow \Omega$ die vom IFS induzierte Adress Map.

Das folgende Theorem fasst die wichtigsten Eigenschaften von G zusammen - eine der Inklusionen der ersten Aussage ist in Anbetracht unserer Vorüberlegungen in keinsten Weise überraschend:

Satz 3.9. Gegeben sei ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$. Dann hat die Adress Map $G : \Sigma_N \rightarrow \Omega$ die folgenden Eigenschaften:

1. $G(\Sigma_N) = A^*$.
2. G ist stetig.

Beweis. Wir unterteilen den Beweis abermals in drei Schritte.

Schritt 1: Wir zeigen $G(\Sigma_N) \subseteq A^*$: Wegen $G(\underline{k}) = G^x(\underline{k})$ für alle $x \in \Omega$ und $\underline{k} \in \Sigma_N$, und der Tatsache, dass für $x \in A^*$ auch

$$f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(x) \in A^*$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt sofort

$$G(\underline{k}) := G^z(\underline{k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z) \in A^*.$$

Schritt 2: Wir zeigen, dass G stetig ist: Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig, aber fest. Wir wählen ein (minimales) $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $L^{i_0} \text{diam } A^* < \epsilon$ und setzen $\delta < 2^{-i_0}$. Dann folgt für $\underline{k} \neq \underline{l}$ mit $\rho(\underline{k}, \underline{l}) < \delta$ sofort, dass die ersten i_0 Stellen von \underline{k} und \underline{l} gleich sind und wir erhalten unter Verwendung der Kontraktionseigenschaft für $n > i_0$

$$\begin{aligned} d\left(f_{k_1} \circ \cdots \circ f_{k_n}(x), f_{l_1} \circ \cdots \circ f_{l_n}(x)\right) &\leq L^{i_0} d\left(\underbrace{f_{k_{i_0+1}} \circ \cdots \circ f_{k_n}(x)}_{\in A^*}, \underbrace{f_{l_{i_0+1}} \circ \cdots \circ f_{l_n}(x)}_{\in A^*}\right) \\ &\leq L^{i_0} \text{diam}(A^*) < \epsilon, \end{aligned}$$

G ist also stetig.

Schritt 3: Als letzten Schritt zeigen wir $G(\Sigma_N) = A^*$. Nachdem $G(\Sigma_N)$ als stetiges Bild einer kompakten Menge wieder kompakt und klarerweise nichtleer ist, genügt es ob der Eindeutigkeit des Fixpunkts von \mathcal{W} in $\mathcal{K}(\Omega)$, die Gleichheit $\mathcal{W}(G(\Sigma_N)) = G(\Sigma_N)$ zu zeigen.

(i) Für $z \in \mathcal{W}(G(\Sigma_N))$ existiert offensichtlich ein $\underline{k} \in \Sigma_N$ und ein $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ mit $z \in f_{k_0}(G(\underline{k}))$. Die Stetigkeit von f_{k_0} impliziert daher sofort ($s \in A^*$ beliebig)

$$z = f_{k_0}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ \cdots \circ f_{k_n}(s)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_0} \circ f_{k_1} \circ \cdots \circ f_{k_n}(s) \in G(\Sigma_N)$$

Nachdem $z \in \mathcal{W}(G(\Sigma_N))$ beliebig war, folgt direkt $\mathcal{W}(G(\Sigma_N)) \subseteq G(\Sigma_N)$.

(ii) Umgekehrt sei nun $w \in G(\Sigma_N)$ beliebig, aber fest. Dann existiert ein $\underline{k} \in \Sigma_N$ mit $G(\underline{k}) = w$ und wir erhalten ($s \in A^*$ wie zuvor beliebig)

$$\begin{aligned} w &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(s) \stackrel{f_{k_1} \text{ stetig}}{=} f_{k_1}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(s)\right) \\ &= f_{k_1}(G((k_2, k_3, \dots))) \in \mathcal{W}(G(\Sigma_N)), \end{aligned}$$

und damit die zweite Inklusion. □

Bemerkung 3.10. Für sog. total unzusammenhängende IFS ist $G : \Sigma_N \rightarrow A^*$ sogar ein Homöomorphismus: Betrachten wir zum Beispiel das IFS $\{[0, 1], (f_i)_{i=1}^2\}$ der Cantormenge C^* , definiert durch $f_1(x) = \frac{x}{3}$ und $f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$, dann gilt offensichtlich $f_1(C^*) \cap f_2(C^*) = \emptyset$, die Abbildung G ist daher injektiv. G ist also eine stetige Bijektion von Σ_2 nach C^* und als solche sogar ein Homöomorphismus. Mit anderen Worten: Σ_2 und C^* sind ‘topologisch gleich’. Im nächsten Abschnitt werden wir großteils mit total unzusammenhängenden IFSen arbeiten.

Definition 3.11. Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS mit Attraktor $A^* \in \mathcal{K}(\Omega)$ und $G : \Sigma_N \rightarrow \Omega$ die entsprechende Adress Map. Dann heißt für jedes $x \in A^*$ die (abgeschlossene) Menge $G^{-1}(\{x\})$ die Adressmenge (Menge aller Adressen) von x .

Die Adressen einiger Punkte sind offensichtlich: Der (eindeutige) Fixpunkt x_i^* der Kontraktion f_i hat wegen

$$G((i, i, i, \dots)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_i^n(x_i^*) = x_i^*$$

die Adresse (i, i, i, \dots) . Damit ergibt sich via

$$G((k, i, i, i, \dots)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_k \circ f_i^n(x_i^*) = f_k(x_i^*)$$

sofort, dass der Punkt mit Adresse (k, i, i, i, \dots) genau $f_k(x_i^*)$ ist.

Beispiel 3.12. Welcher Punkt der Cantormenge C^* hat Adresse $\underline{k} = (121212\dots)$? Aus obigen Vorüberlegungen und der Tatsache, dass jede Verkettung von Kontraktionen wieder eine Kontraktion ist folgt sofort, dass der gesuchte Punkt der Fixpunkt von $f_1 \circ f_2$ sein muss. Mit anderen Worte, der gesuchte Punkt x erfüllt

$$\frac{1}{9}x + \frac{2}{9} = f_1 \circ f_2(x) = x$$

woraus sofort $x = \frac{1}{4} \in C^*$ folgt.

Der folgende Operator wird im Rest der Vorlesung eine sehr prominente Rolle einnehmen:

Definition 3.13 (Linksshiftoperator). Der Operator $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$, definiert durch

$$\sigma((k_1, k_2, k_3, \dots)) := ((k_2, k_3, k_4, \dots))$$

heißt Linksshiftoperator.

Das folgende Resultat ist nach obigen Vorüberlegungen wenig überraschend:

Satz 3.14. Gegeben sei ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ mit Attraktor A^* und Adress Map G . Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichheit:

$$G(\underline{k}) = f_{k_1} \circ \dots \circ f_{k_m} \left(G(\sigma^m(\underline{k})) \right).$$

Beweis. Die Behauptung folgt durch einfaches Nachrechnen unter Verwendung der Stetigkeit der involvierten Kontraktionen:

$$\begin{aligned} G(\underline{k}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \dots \circ f_{k_n}(x) \\ &= f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \dots \circ f_{k_m} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_{m+1}} \circ \dots \circ f_{k_n}(x) \right) \\ &= f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \dots \circ f_{k_m} \left(G(\sigma^m(\underline{k})) \right). \end{aligned}$$

□

Zusammenfassend haben wir also gezeigt, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
 (\Sigma_N, \rho) & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_N \\
 \downarrow G & \text{stetig} & \downarrow G \\
 (A^*, d) & \xleftarrow{f_{k_1}} & A^*
 \end{array}$$

Es gilt also für jedes $\underline{k} \in \Sigma_N$ die Gleichheit

$$f_{k_1} \circ G(\underline{k}) = G \circ \sigma(\underline{k}).$$

Definition 3.15. Gegeben sei ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ mit Attraktor A^* und Adress Map G . Wir nennen $x \in A^*$ periodisch genau dann, wenn es eine Adresse $\underline{k} \in G^{-1}(\{x\}) \subseteq \Sigma_N$ von x gibt, die bezüglich σ periodisch ist, i.e., wenn es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $\sigma^p(\underline{k}) = \underline{k}$ gibt. Im folgenden bezeichnet $\text{Per}(\sigma)$ die periodischen Punkte in Σ_N .

Beispiel 3.16. Wir betrachten wieder die Cantormenge C^* und speziell $0 \in C^*$. Dann gilt offensichtlich $G^{-1}(\{0\}) = (1111\dots)$, der Punkt 0 ist also periodisch. Wegen $\frac{1}{3} \in C^*$ und $\implies G^{-1}(\{\frac{1}{3}\}) = (122222\dots)$ ist $\frac{1}{3}$ nicht periodisch.

Allgemein liegen die periodischen Punkte dicht in A^* - es gilt folgender Satz:

Satz 3.17. Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS mit Attraktor $A^* \in \mathcal{K}(\Omega)$ und Adress Map $G : \Sigma_N \rightarrow \Omega$. Dann liegen die periodischen Punkte dicht in A^* .

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\text{Per}(\sigma)$ dicht in Σ_N ist und betrachten dafür $\underline{k} \in \Sigma_N$ und $r > 0$ beliebig aber fest. Dann existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-i_0} < r$ und es folgt

$$\begin{aligned}
 B(\underline{k}, r) &\supseteq B\left(\underline{k}, \frac{1}{2^{i_0}}\right) = \left\{ \underline{l} \in \Sigma_N : \rho(\underline{k}, \underline{l}) < \frac{1}{2^{i_0}} \right\} \\
 &= \{ \underline{l} \in \Sigma_N : l_1 = k_1, l_2 = k_2, \dots, l_{i_0} = k_{i_0} \}
 \end{aligned}$$

Offensichtlich liegt der i_0 -periodische Punkte $(k_1, k_2, \dots, k_{i_0}, k_1, k_2, \dots, k_{i_0}, \dots)$ in $B(\underline{k}, \frac{1}{2^{i_0}})$, es gilt also $\text{Per}(\sigma) \cap B(\underline{k}, r) \neq \emptyset$ und die behauptete Dichtheit ist gezeigt.

Per definitionem ist jeder Punkt in $G(\text{Per}(\sigma)) \subseteq A^*$ periodisch, es genügt daher die Gleichheit $\overline{G(\text{Per}(\sigma))} = A^*$ nachzuweisen. Letztere folgt aber sofort aus

$$A^* = G(\Sigma_N) = \overline{G(\Sigma_N)} \supseteq \overline{G(\text{Per}(\sigma))} \stackrel{G \text{ stetig}}{\supseteq} G(\overline{\text{Per}(\sigma)}) = G(\Sigma_N) = A^*,$$

und der Beweis ist komplett. □

3.3 Exkurs @Diskrete Dynamische Systeme

Betrachten wir abermals die Cantormenge C^* , dann gilt für jedes $x \in C^*$ offensichtlich folgende Aussage: Für jedes $x \in C^*$ existiert genau ein $i \in \{1, 2\}$ mit $x \in f_i(C^*)$ und, wegen der Injektivität der beiden Kontraktionen, genau ein $y \in C^*$ mit $x = f_i(y)$. Auf diese Art und Weise kann offensichtlich eine Abbildung $S : A^* \rightarrow A^*$ konstruiert werden, deren chaotische Eigenschaften wir in der Folge studieren werden. Dabei werden wir nur mit sog. total unzusammenhängenden IFSen bestehend aus Injektionen arbeiten.

Definition 3.18. Ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ heißt total unzusammenhängend genau dann, wenn $f_i(A^*) \cap f_j(A^*) = \emptyset$ für alle $i \neq j$.

Für total unzusammenhängende IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$, deren Kontraktionen injektiv sind, können wir analog wie bei der Cantormenge vorgehen und eine Abbildung $S : A^* \rightarrow S^*$ konstruieren: Für jedes $x \in A^*$ existiert genau ein $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ mit $x \in f_i(A^*)$ und, wegen der Injektivität der beiden Kontraktionen, genau ein $y \in A^*$ mit $x = f_i(y)$. Wir setzen einfach $S(x) := y$.

Wir starten mit einigen allgemeinen Definitionen betreffend Eigenschaften einer Abbildung T auf einem metrischen Raum (Ω, d) und überlegen uns dann, welche Eigenschaften S auf A^* (und σ auf Σ_N) erfüllt.

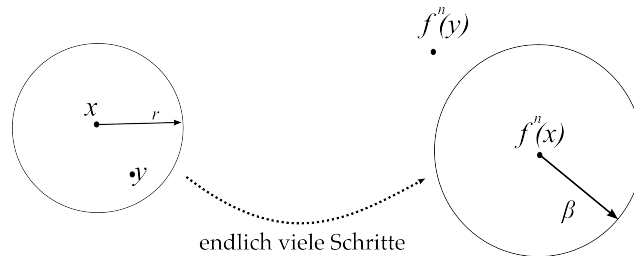
Definition 3.19. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $T : \Omega \rightarrow \Omega$ eine Transformation. Dann heißt die Menge $O_T^+(x) := \{S^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ der T -Orbit von x (kurz ‘Orbit von x ’).

Die erste Eigenschaft wird volkstümlich auch oft als Schmetterlingseffekt bezeichnet - beliebige kleine Änderungen der Anfangsbedingungen führen nach ausreichend langer Zeit zu abweichenden ‘Pfadern’.

Definition 3.20. Eine Transformation T auf (Ω, d) heißt sensitiv genau dann wenn, wenn eine Konstante $\beta > 0$ existiert, sodass für jedes $x \in \Omega$ und jedes $r > 0$ ein $y \in B(x, r)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \beta$$

existieren.



Die zweite Eigenschaft untersucht, ob ‘man von überall auch überall hinkommt’.

Definition 3.21. Eine stetige Transformation T auf (Ω, d) heißt topologisch transitiv genau dann, wenn für beliebige nichtleere offene Mengen $U, V \subseteq \Omega$ ein Index $n \in \mathbb{N}$ mit

$$S^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$$

existiert.

Wenn eine stetige Transformation gleichzeitig reguläres Verhalten (‘überall’ liegen periodische Punkte) und irreguläres Verhalten (man kommt von ‘überall auch überall hin’ und reagiert sensitiv auf die Anfangsbedingungen) aufweist, dann spricht man von einer chaotischen Abbildung:

Definition 3.22. T auf (Ω, d) heißt chaotisch genau dann, wenn T topologisch transitiv und sensitiv ist, und die periodischen Punkte dicht liegen.