

# Skriptum zur Vorlesung (Mathematische) Statistik

LV-Nr. 405.160

Assoz. Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig

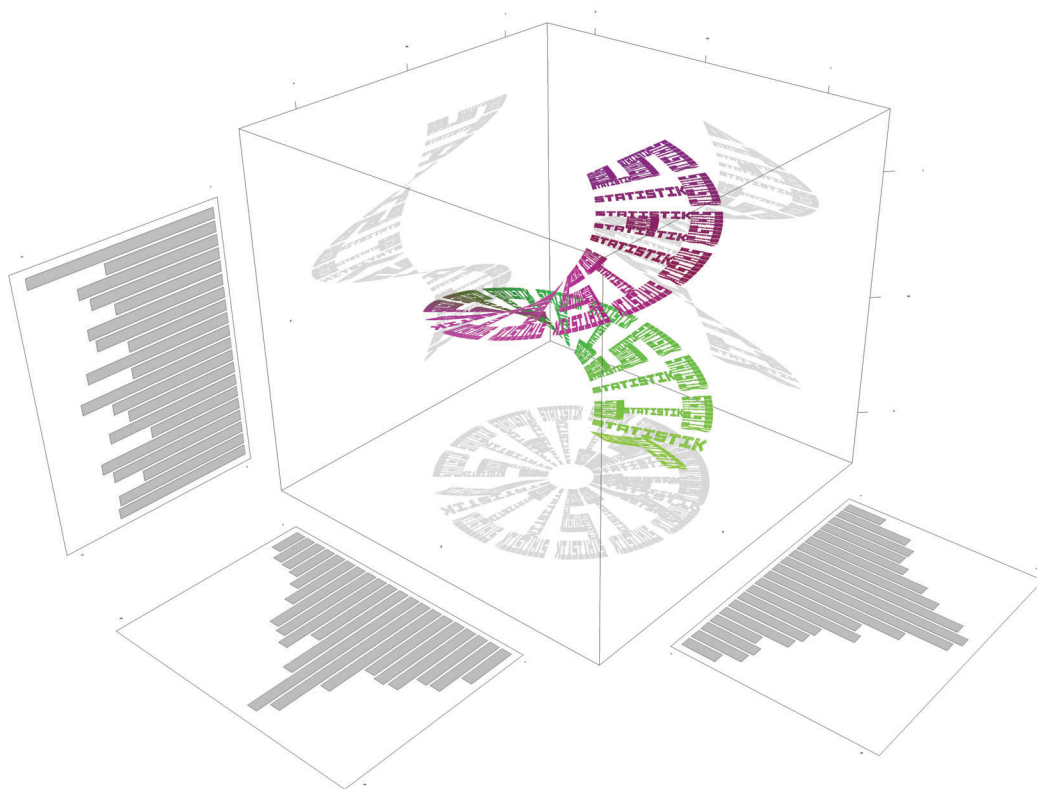
[www.trutschnig.net](http://www.trutschnig.net)

Fachbereich Mathematik

Paris Lodron Universität Salzburg

Hellbrunner Strasse 34

A-5020 Salzburg



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Worum geht's?</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Mengensysteme, Wahrscheinlichkeitsmaße</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Zufallsvariable</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Absolute stetige Verteilungen</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Verteilungsfunktionen</b>	<b>19</b>
4.1	Eindimensionaler Fall . . . . .	19
4.2	Stichprobenerzeugung . . . . .	22
4.3	Multivariate Verteilungsfunktionen . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Erwartungswerte</b>	<b>29</b>
<b>6</b>	<b>Unabhängigkeit</b>	<b>40</b>
6.1	Unabhängige Mengensysteme und Zufallsvariable . . . . .	40
6.2	Faltung von Zufallsvariablen . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Starkes Gesetz der Großen Zahlen &amp; Fundamentalsatz der Statistik</b>	<b>47</b>
<b>8</b>	<b>Charakteristische Funktionen</b>	<b>51</b>
<b>9</b>	<b>Konvergenzbegriffe</b>	<b>57</b>
<b>10</b>	<b>Schätzfunktionen und deren Eigenschaften</b>	<b>60</b>
<b>11</b>	<b>Konstruktion von Schätzern</b>	<b>65</b>
11.1	Maximum Likelihood Schätzer . . . . .	65
11.2	Momentenschätzer . . . . .	69
<b>12</b>	<b>Appendix (nicht Prüfungstoff)</b>	<b>71</b>
<b>13</b>	<b>Übungsblätter</b>	<b>75</b>
	<b>Literatur</b>	<b>74</b>

---

# Kapitel 0

## Worum geht's?

Das Fach Statistik ist die Wissenschaft und Kunst, aus Daten relevante und interessante Information zu ziehen ('making sense of data'). Heutzutage verstehen wir unter dem Begriff Statistik die Gesamtheit der Methoden zum Sammeln, Beschreiben und Analysieren von Daten und zum Ziehen von sinnvollen Schlüssen aus denselben. Die Wissenschaft der Statistik ist eine recht junge - das Fach hat sich erst Anfang bis Mitte des 20. Jahrhunderts selbständig gemacht, basierend auf den bis dahin entwickelten Fundamenten der Wahrscheinlichkeitstheorie (insbesondere die russische Schule) und Anwendungen, vor allem in den Agrarwissenschaften (R.A. Fisher und andere Pioniere der englischen Schule). Vorher war Statistik als Fach eher die Kunst der Datenverwaltung zum Zwecke der Staatsführung, worin auch der Name begründet ist. Gottfried Achenwall (1749) gilt als der erste, der den Begriff in diesem Sinne gebraucht hatte.

Im Allgemeinen wird zwischen *beschreibender* (deskriptiver) und *schließender* (induktiver) Statistik unterschieden. Die beschreibende Statistik entspricht in etwa dem klassischen Begriff des Zusammenfassens von Daten, allerdings heutzutage natürlich mit anderen Mitteln, als dies im 18. Jahrhundert, zu Achenwalls Zeiten, möglich war. Das wesentliche Ziel der Methoden der beschreibenden Statistik ist, Information aus Daten zu destillieren, Muster zu erkennen, und große, möglicherweise unübersichtliche Datenmengen in wenigen, verständlichen Zahlen oder visuell zu erfassen. Das ist oft eine echte Kunst und verlangt mindestens so viel Erfahrung wie Fachkenntnis.

Die vorliegende Grundvorlesung Statistik im Bachelor-Studiengang Mathematik befasst sich im Wesentlichen mit mathematischen Grundlagen der schließenden Statistik. Schließend ist dieser Zweig der Statistik insofern, als es hier darum geht, aus Stichproben Schlüsse über die sogenannte Grundgesamtheit zu treffen, aus der die Stichprobe gezogen wurde. Die Methoden der schließenden Statistik produzieren gewöhnlich nicht nur Schätzungen für die unbekannt Parameter, an denen wir interessiert sind, sondern liefern auch Information über die Präzision ebendieser Schätzer. Das ist nur möglich, indem (a) bestimmte Modellannahmen getroffen werden und (b) basierend auf diesen Modellannahmen ein mittlerweile hochentwickelter Apparat aus mathematischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden zu Hilfe genommen wird.

Das Ziel dieser Vorlesung ist es, grundlegende Teile dieses Apparates zu vermitteln<sup>†</sup>. Die damit einhergehenden eher theoretische Ausrichtung der Vorlesung wird ergänzt durch zahl-

---

<sup>†</sup>Die Vorlesung verwendet Grundlagen aus Analysis 1-3 sowie der LVA Stochastische Modellbildung

---

reiche angewandte Beispiele und Übungen, die zum Teil mit der Statistik-Software R (siehe <http://www.r-project.org/>) bearbeitet werden. Die Vorlesung schafft hoffentlich die Grundlagen und weckt das Interesse an weitergehenden Statistik-Lehrveranstaltungen (insbesondere an der UV Angewandte Statistik), in denen wieder die Brücke zwischen beschreibender und schließender Statistik geschlossen wird, und die über die sorgfältige Anwendung existierender statistischer Methoden hinausgehend zum eigenständigen Entwickeln und Validieren neuer statistischer Methoden hinleiten mögen.

# Kapitel 1

## Mengensysteme, Wahrscheinlichkeitsmaße

Der Großteil der folgenden fundamentalen Begriffe sind schon aus den Vorlesungen 'Stochastische Modellbildung' und Analysis 3 bekannt:

**Definition 1.1** Eine Familie  $\mathcal{A}$  von Teilmengen einer Menge  $\Omega$  ('Grundgesamtheit') heisst  $\sigma$ -Algebra, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$ .
2. Für jedes  $A \in \mathcal{A}$  ist auch  $A^c \in \mathcal{A}$ .
3. Für  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$  gilt auch  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

Jedes  $A \in \mathcal{A}$  heisst messbar bzw. Ereignis.  $(\Omega, \mathcal{A})$  heisst Messraum.

**Lemma 1.2** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum und  $A, B, A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$ . Dann sind auch die folgenden Mengen messbar:

1.  $A \setminus B$ .
2.  $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  (symmetrische Differenz).
3.  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .
4.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$  (limes superior der Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ )
5.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$  (limes inferior der Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ )

**Beweis:** Übungsaufgabe

**Bemerkung 1.3** Angelehnt an den reellen Fall heisst eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  messbarer Mengen konvergent genau dann, wenn  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

**Satz 1.4** Für jedes System  $\mathcal{E}$  von Teilmengen von  $\Omega$  existiert eine kleinste  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$  mit  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ . Wir nennen  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$  die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

**Beweis:** Übungsaufgabe. Es reicht zu zeigen, dass der beliebige Durchschnitt von  $\sigma$ -Algebren wieder eine  $\sigma$ -Algebra ist.

**Beispiel 1.5** Die Vereinigung von  $\sigma$ -Algebren muss keine  $\sigma$ -Algebra sein: Betrachten wir  $\Omega = [0, 1]$  sowie  $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, [0, 1], [0, 3/4], (3/4, 1]\}$  und  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, [0, 1], [0, 1/4], (1/4, 1]\}$  dann ist  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  offensichtlich keine  $\sigma$ -Algebra.

**Definition 1.6** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum.  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  heisst *Wahrscheinlichkeitsmass* genau dann wenn  $P(\Omega) = 1$  gilt und  $P$   $\sigma$ -additiv ist, i.e. für jede Folge  $A_1, A_2, \dots$  von messbaren, paarweise disjunkten Mengen gilt

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \tag{1.1}$$

Das Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  heisst *Wahrscheinlichkeitsraum*.

**Lemma 1.7** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum, dann gilt:

- (a)  $P(\emptyset) = 0$ .
- (b) Für  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $A \subseteq B$  gilt  $P(A) \leq P(B)$ .
- (c) Für jede wachsende Folge  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$  messbarer Mengen gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$  (*Stetigkeit von unten*).
- (d) Für jede fallende Folge  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$  messbarer Mengen gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$  (*Stetigkeit von oben*).

Die Eigenschaften (b)-(d) besagen, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmass monoton und stetig von unten und oben ist.

**Beweis:** Aussage (a) folgt direkt aus Gleichung (1.1).

(b): Wegen  $B = A \cup (B \setminus A)$  und  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$  folgt aus (1.1) unmittelbar (einfach  $A_n := \emptyset$  für alle  $n \geq 3$  setzen)  $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ , also  $P(B) - P(A) = P(B \setminus A) \geq 0$ .

Zum Beweis von (c) kann wie folgt vorgegangen werden: Wir setzen  $B_1 := A_1$  und, für jedes  $n \geq 2$ ,  $B_n := A_n \cap A_{n-1}^c$ . Dann ist  $B_n \in \mathcal{A}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ , und es gilt  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ . Anwendung der  $\sigma$ -Additivität liefert daher

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Beweis von (d): Übungsaufgabe ■

**Bemerkung 1.8** A-priori ist unklar, warum man anstatt mit Wahrscheinlichkeitsmassen auf  $\sigma$ -Algebren (oder schwächeren Strukturen) nicht gleich mit Wahrscheinlichkeitsmassen auf Potenzmengen  $\mathfrak{p}(\Omega)$  arbeitet. Die zwei Hauptgründe dafür sind die Folgenden:

**Grund 1:** Es ist unmöglich, (Wahrscheinlichkeits-) Maße mit natürlichen Eigenschaften auf ganz  $\mathfrak{p}(\Omega)$  zu definieren. Angenommen, wir suchen eine Funktion  $\mathcal{V} : \mathfrak{p}(\mathbb{R}^3) \rightarrow [0, \infty]$ , die das 'Volumen' von Mengen beschreibt und daher mindestens folgende Bedingungen erfüllen sollte:

(V1)  $\mathcal{V}(A \cup B) = \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$  für alle  $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$  mit  $A \cap B = \emptyset$

(V2)  $\mathcal{V}([0, 1]^3) = 1$

(V3) Für jede Bewegung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und jedes  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  gilt  $\mathcal{V}(f(A)) = \mathcal{V}(A)$ .

Hausdorff zeigte 1905, dass es keine solche Funktion  $\mathcal{V}$  gibt. Banach & Tarski bewiesen 1924 ein noch wesentlich stärkeres Resultat, das sog. 'Banach-Tarski-Paradoxon'<sup>†</sup> (interessantes Thema für eine Bachelor Arbeit):

**Satz 1.9 (Banach-Tarski Paradoxon, AC)** *Angenommen  $K, G \subseteq \mathbb{R}^3$  sind beschränkt und haben nichtleeres Inneres. Dann existieren paarweise disjunkte Mengen  $K_1, \dots, K_n$  mit  $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$  und Bewegungen  $f_1, \dots, f_n$  sodass  $f_1(K_1), \dots, f_n(K_n)$  paarweise disjunkt sind und  $G = \bigcup_{i=1}^n f_i(K_i)$  gilt.*

*Mit anderen Worten: Aus einem Tennisball  $K$  kann durch geschickte Zerlegung und Bewegung ein Fussball  $G$  gebastelt werden.*

**Grund 2:** Wahrscheinlichkeitsmaße können eindeutig von 'guten' kleinen Klassen (Halbringe etc.) auf die erzeugten  $\sigma$ -Algebren fortgesetzt werden (vergleiche Satz 1.11 sowie [2, 4, 5]). Als Beispiel betrachten wir  $\Omega = [0, 1]$  und die Klasse  $\mathfrak{h}$ , definiert durch

$$\mathfrak{h} = \{(a, b] \subseteq [0, 1] : a \leq b\} \tag{1.2}$$

Offensichtlich ist  $\mathfrak{h}$  keine  $\sigma$ -Algebra, zum Beispiel ist weder  $(0, 1/4] \cup (1/2, 1]$  noch  $[0, 1]$  ein Element von  $\mathfrak{h}$ .  $\mathfrak{h}$  hat aber die folgenden Eigenschaften: (i)  $\emptyset \in \mathfrak{h}$ , (ii)  $A, B \in \mathfrak{h}$  impliziert  $A \cap B \in \mathfrak{h}$ , (iii) Gelte  $A, B \in \mathfrak{h}$  und  $A \subseteq B$ , dann existieren disjunkte Mengen  $E_1, E_2 \in \mathfrak{h}$  mit  $B \setminus A = E_1 \cup E_2$ .  $\mathfrak{h}$  ist ein sogenannter Halbring:

**Definition 1.10** *Eine Familie  $\mathfrak{h}$  von Teilmengen einer Menge  $\Omega$  heisst Halbring, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

1.  $\emptyset \in \mathfrak{h}$ .
2. Für  $A, B \in \mathfrak{h}$  gilt auch  $A \cap B \in \mathfrak{h}$ .
3. Für  $A, B \in \mathfrak{h}$  mit  $A \subseteq B$  gilt: Es existieren paarweise disjunkte Mengen  $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{h}$  sodass  $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^n E_i$ .

Es ist klar, wie Elementen von  $\mathfrak{h}$  gemäß (1.2) eine Länge zugewiesen werden kann: Wir definieren einfach

$$\lambda((a, b]) := b - a \tag{1.3}$$

Wie kann dieses  $\lambda$  auf kompliziertere Mengen  $A \in \mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{h})$  erweitert werden? Naheliegende Idee: Überdecke  $A$  möglichst gut durch halboffene Intervalle, i.e. für  $A \subseteq [0, 1]$  definiere

$$\lambda(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i) : I_1, I_2, \dots \in \mathfrak{h}, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\} \tag{1.4}$$

Dann lässt sich zeigen (siehe Vorlesung Analysis 3/Maßtheorie), dass damit ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\lambda$  auf  $\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{h})$  definiert ist. Im Folgenden werden wir  $\lambda$  als *Lebesgue'sches Maß* bezeichnen. Allgemeiner gilt folgender Satz:

<sup>†</sup>für mehr Hintergrundwissen sei auf die Vorlesung Analysis 3/Maßtheorie verwiesen

**Satz 1.11** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum und  $\mathfrak{h}$  ein Halbring mit der Eigenschaft  $\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{h}) = \mathcal{A}$ . Weiters sei  $\mu : \mathfrak{h} \rightarrow [0, 1]$   $\sigma$ -additiv<sup>†</sup>. Dann existiert ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf  $(\Omega, \mathcal{A})$ , für das  $P(E) = \mu(E)$  für alle  $E \in \mathfrak{h}$  gilt.

**Beweis:** Übersteigt leider den Rahmen dieser Vorlesung, siehe Vorlesung Analysis 3/Maßtheorie sowie [2, 4, 5, 7]. Für Interessierte sei hier nur angemerkt, dass der Beweis der Fortsetzbarkeit auf der ganz elementaren, zuvor schon erwähnten Idee beruht: Approximiere (überdecke) die Menge  $A$ , von der die Fläche (das Volumen) berechnet werden soll, durch einfache Objekte (Rechtecke), deren Fläche (Volumen) bekannt ist.

**Beispiel 1.12** Die folgenden Eigenschaften des Lebesgue-Maßes sind leicht zu zeigen (Übungsaufgabe) -  $\mathfrak{h}$  bezeichnet dabei wieder den Halbring der halboffenen Intervalle gemäß (1.2):

(S1) Für jedes  $[a, b] \subseteq (0, 1]$  gilt  $[a, b] \in \mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{h})$

(S2) Für  $[a, b] \subseteq (0, 1]$  gilt  $\lambda([a, b]) = b - a$

(S3)  $\lambda(\mathbb{Q} \cap (0, 1]) = 0$

Die im Folgenden für uns wichtigste  $\sigma$ -Algebra ist die sogenannte Borel'sche  $\sigma$ -Algebra:

**Definition 1.13** Gegeben sei ein metrischer Raum  $(\Omega, d)$ . Dann heißt die von der Familie  $\mathcal{O}$  aller offenen Mengen erzeugte  $\sigma$ -Algebra die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen bzw. Borel'sche  $\sigma$ -Algebra. Wir bezeichnen sie im Folgenden mit  $\mathcal{B}(\Omega)$ .

**Lemma 1.14** Wir betrachten die folgenden Mengensysteme in  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_1 &= \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a < b\}, & \mathcal{E}'_1 &= \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a < b \text{ und } a, b \in \mathbb{Q}\} \\
 \mathcal{E}_2 &= \{(a, b] \subseteq \mathbb{R} : a < b\}, & \mathcal{E}'_2 &= \{(a, b] \subseteq \mathbb{R} : a < b \text{ und } a, b \in \mathbb{Q}\} \\
 \mathcal{E}_3 &= \{[a, b) \subseteq \mathbb{R} : a < b\}, & \mathcal{E}'_3 &= \{[a, b) \subseteq \mathbb{R} : a < b \text{ und } a, b \in \mathbb{Q}\} \\
 \mathcal{E}_4 &= \{(-\infty, b) \subseteq \mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{E}'_4 &= \{(-\infty, b) \subseteq \mathbb{R} : b \in \mathbb{Q}\} \\
 \mathcal{E}_5 &= \{(b, \infty) \subseteq \mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{E}'_5 &= \{(b, \infty) \subseteq \mathbb{R} : b \in \mathbb{Q}\} \\
 \mathcal{E}_6 &= \{K \subseteq \mathbb{R} : K \text{ kompakt}\} \\
 \mathcal{E}_7 &= \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ abgeschlossen}\}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dann sind alle 12 Familien Erzeuger der Borel'sche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  in  $\mathbb{R}$ .

**Beweis:** Wir zeigen nur, dass  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  erzeugen.

(i) Da jedes Element von  $\mathcal{E}_1$  offen ist gilt  $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{O}$  und damit  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Umgekehrt kann jede offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  als höchstens abzählbare Vereinigung  $\bigcup_{i=1}^\infty I_i$  von offenen Intervallen dargestellt werden. Wegen  $\bigcup_{i=1}^\infty I_i \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1)$  folgt damit  $U \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1)$ , also  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1)$ , und damit insgesamt  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

(ii) Wegen  $(a, b) = \bigcap_{n=1}^\infty (a, b + 1/n)$  gilt  $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$  und damit  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Da weiters  $(a, b) = \bigcup_{n=1}^\infty (a, b - 1/n]$  gilt, folgt  $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2)$ , also auch  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2)$ . ■

<sup>†</sup>i.e. für paarweise disjunkte Mengen  $A_1, A_2, \dots$  in  $\mathfrak{h}$  mit  $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{h}$  gilt Gleichung (1.1)



**Bemerkung 1.15** Entsprechende Aussagen gelten auch im allgemeinen Fall von  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ , siehe [2, 4, 5]. So ist zum Beispiel die Klasse  $\mathcal{I}_d$  aller halboffenen  $d$ -dimensionalen Rechtecke

$$\mathcal{I}_d := \left\{ \times_{i=1}^d (a_i, b_i] : \forall i \in \{1, \dots, d\} : a_i \leq b_i \right\} \quad (1.6)$$

ein Halbring, der  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  erzeugt, i.e. es gilt  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{I}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

**Folgerung 1.16** *Es existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\lambda_d$  auf  $([0, 1]^d, \mathcal{B}([0, 1]^d))$ , das*

$$\lambda_d \left( \times_{i=1}^d (a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

für alle  $a_i, b_i \in [0, 1]$  und  $a_i \leq b_i$  erfüllt. Dieses Maß geht auf Henri Lebesgue zurück und trägt den Namen  $d$ -dimensionales Lebesgue Maß.

**Beweis:** Die Familie  $\mathcal{I}_d$  aller  $d$ -dimensionalen Rechtecke der Form  $\times_{i=1}^d (a_i, b_i]$  ist ein Halbring und  $\lambda_d$  ist  $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{I}_d$  (beides selbst verifizieren!). Damit ist Satz 1.11 anwendbar. ■

**Bemerkung 1.17** Die Definition von  $\lambda_d$  kann auch unschwer auf ganz  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  erweitert werden (siehe Analysis 3). Das entsprechenden Maß (für das  $\lambda_d(\mathbb{R}^d) = \infty$  gilt) werden wir ebenfalls mit  $\lambda_d$  bezeichnen.

## Kapitel 2

# Zufallsvariable

In der Vorlesung 'Stochastische Modellbildung' haben Sie zu einem großen Teil diskrete Zufallsvariable  $X$ , i.e. Abbildungen  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  mit abzählbarem Wertebereich  $W_X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ , betrachtet, die Wahrscheinlichkeiten  $P(X = \alpha_i)$  berechnet und nachfolgend verwendet. Dabei wurde immer implizit angenommen, dass  $P(X = \alpha_i)$  wohldefiniert ist, i.e. dass  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \alpha_i\}$  ein Element der  $\sigma$ -Algebra ist, auf der  $P$  definiert ist. Mit anderen Worten: Grundannahme war

$$X^{-1}(\{\alpha_i\}) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = \alpha_i\} \in \mathcal{A} \quad \text{für jedes } \alpha_i \in W_X. \quad (2.1)$$

Falls Bedingung (2.1) erfüllt ist, gilt für jede Menge  $E \subseteq W_X$  auch  $X^{-1}(E) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} \in \mathcal{A}$  weil

$$\begin{aligned} X^{-1}(E) &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} = \bigcup_{e \in E} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = e\} \\ &= \bigcup_{e \in E} \underbrace{X^{-1}(\{e\})}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Sei  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  nun eine beliebige Abbildung, die den Ausgang eines Zufallsexperiments beschreibt, beispielsweise die Lebensdauer eines elektronischen Bauteiles. Um die Güte des Bauteiles bewerten zu können, interessiert man sich insbesondere für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Bauteil höchstens bis zum Zeitpunkt  $T$  funktioniert, i.e. für

$$P(X^{-1}((-\infty, T])) = P(X \leq T).$$

Mengen der Form

$$X^{-1}((-\infty, T]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq T\}$$

müssen also  $X^{-1}((-\infty, T]) \in \mathcal{A}$  erfüllen.

**Frage 2.1** Für welche weiteren Menge  $E \subseteq \mathbb{R}$  sollte  $P(X^{-1}(E))$  für das Beispiel der Lebensdauer  $X$  bekannt sein? Wen interessiert  $P(X^{-1}(E))$  für eine sehr komplizierte Menge  $E$ , zum Beispiel die Cantor Menge?

Das folgende Resultat zeigt, dass aus der Eigenschaft  $X^{-1}((-\infty, T]) \in \mathcal{A}$  für jedes  $T \in \mathbb{R}$  schon  $X^{-1}(E) \in \mathcal{A}$  für jede Borel-Menge  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  folgt - allgemeiner gilt folgendes wichtiges Resultat:

**Satz 2.2** Gegeben sei eine Abbildung  $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  sowie ein Erzeuger  $\mathcal{E}_2$  von  $\mathcal{A}_2$ . Gilt  $f^{-1}(E_2) \in \mathcal{A}_1$  für jedes  $E_2 \in \mathcal{E}_2$  dann folgt  $f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1$  für jedes  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ .

**Beweis:** Wir beweisen das Resultat in drei Schritten:

(i) Leicht nachzuprüfen (Übungsaufgabe): Für jedes beliebige  $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  sind die Mengensysteme

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}_2\}, \quad f(\mathcal{A}_1) := \{B \subseteq \Omega_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\} \quad (2.2)$$

wieder  $\sigma$ -Algebren.

(ii) Wir zeigen, dass für jedes Mengensystem  $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathfrak{p}(\Omega_2)$  und jedes  $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  die folgende Gleichheit gilt:

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{S}_2)) = f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}_2)) \quad (2.3)$$

Einerseits gilt offensichtlich  $f^{-1}(\mathcal{S}_2) \subseteq f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}_2))$ , also  $\mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{S}_2)) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}_2))) = f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}_2))$ . Für den Beweis der anderen Inklusion betrachten wir das Mengensystem  $\mathcal{C} := f(\mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{S}_2)))$ . Nach (i) ist  $\mathcal{C}$  eine  $\sigma$ -Algebra und für jedes  $B \in \mathcal{S}_2$  gilt offensichtlich  $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{S}_2) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{S}_2))$ , also  $B \in \mathcal{C}$  und damit  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}_2) \subseteq \mathcal{C}$ . Anwendung von  $f^{-1}$  liefert schliesslich  $f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}_2)) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{S}_2))$ .

(iii) Satz 2.2 kann nun wie folgt bewiesen werden: Aus  $f^{-1}(E_2) \in \mathcal{A}_1$  für jedes  $E_2 \in \mathcal{E}_2$  folgt unter Verwendung von (ii)  $f^{-1}(\mathcal{A}_2) = f^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2)) = \mathcal{A}_\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2)) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_1$ , also die gewünschte Eigenschaft. ■

**Definition 2.3** Seien  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  und  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  Messräume. Eine Abbildung  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  heisst  $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$  messbar genau dann wenn für jedes  $A_2 \in \mathcal{A}_2$  das vollständige Urbild

$$f^{-1}(A_2) := \{\omega \in \Omega_1 : f(\omega) \in A_2\} \in \mathcal{A}_1 \quad (2.4)$$

erfüllt. Eine Abbildung  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  heisst  $d$ -dimensionaler Zufallsvektor falls sie  $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  messbar ist; im Fall  $d = 1$  nennen wir ein solches  $X$  Zufallsvariable. Eine Zufallsvariable heisst diskret wenn sie höchstens abzählbar viele Werte annimmt, sie heisst Indikatorvariable wenn es eine Menge  $A \in \mathcal{A}$  gibt, sodass

$$X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega \in A \\ 0 & \text{wenn } \omega \notin A \end{cases} \quad (2.5)$$

für alle  $\omega \in \Omega$  gilt.

**Beispiel 2.4** Wir betrachten  $\Omega = \{1, 2, 3\}$  und  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3\}\}$ , sowie die folgenden zwei Abbildungen:  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $X(1) = X(2) = 0, X(3) = 1$  und  $Y(1) = 1, Y(2) = 2, Y(3) = 3$ . Dann ist  $X$  eine Zufallsvariable,  $Y$  jedoch nicht (warum?).

**Beispiel 2.5** Auch aus der Analysis bekannte 'komplizierte', nicht-Riemann-integrierbare Funktionen können Zufallsvariable sein. Betrachten wir zum Beispiel  $\Omega = [0, 1], \mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1]), P = \lambda$  und setzen  $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  sowie  $X = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}_0^c}$ . Dann ist  $X$  sogar eine Indikatorvariable und wir erhalten für  $\mathbb{E}(X)$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = P(X = 1) = \lambda(\mathbb{Q}_0^c) = 1 - \lambda(\mathbb{Q}_0) = 1.$$

Wäre 1 nicht auch der intuitiv richtige Wert für  $\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}_0^c}(t) dt$ ?

Nachdem es gemäß Satz 2.2 reicht, Erzeuger zu betrachten, erhalten wir sofort folgendes Resultat:

**Folgerung 2.6** *Eine Abbildung  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Zufallsvariable genau dann wenn für eines der in Lemma 1.14 erwähnten Mengensysteme  $\mathcal{E}$  gilt, dass  $X^{-1}(E) \in \mathcal{A}$  für jedes  $E \in \mathcal{E}$ .*

**Bemerkung 2.7** Beachten Sie die Ähnlichkeit zwischen dem Begriff der stetigen Abbildung (Urbild jeder offenen Menge ist offen) und dem Begriff der messbaren Abbildung (Urbild jeder messbaren Menge ist messbar).

**Lemma 2.8** *Jede stetige Abbildung  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\rho$  ist Borel-messbar.*

**Beweis:** Stetigkeit von  $f$  impliziert, dass das Urbild jeder offenen Menge offen ist, es gilt also  $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  für jedes offene  $V \subseteq \mathbb{R}^\rho$ . Anwendung von Satz 2.2 liefert sofort das gewünschte Resultat. ■

Das folgende einfache Resultat werden wir im Folgenden häufig verwenden:

**Satz 2.9** *Seien  $X_1, X_2, \dots, X_d$  Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\rho$   $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) - \mathcal{B}(\mathbb{R}^\rho)$ -messbar (kurz: Borel-messbar). Dann ist sowohl  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  als auch  $f \circ X$  ein Zufallsvektor.*

**Beweis:** Gemäß Bemerkung 1.15 ist  $\mathcal{I}_d$  ein Erzeuger von  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Für  $\times_{i=1}^d (a_i, b_i]$  gilt aber offensichtlich

$$X^{-1}\left(\times_{i=1}^d (a_i, b_i]\right) = \bigcap_{i=1}^d X_i^{-1}((a_i, b_i]) \in \mathcal{A}.$$

Anwendung von Satz 2.2 liefert also sofort die Messbarkeit von  $X$ . Um die zweite Aussage zu beweisen, reicht es offensichtlich, zu zeigen, dass die Verkettung zweier messbarer Funktionen  $g : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  und  $f : (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \rightarrow (\Omega_3, \mathcal{A}_3)$  wieder messbar ist, was leicht zu zeigen ist: Für  $C \in \mathcal{A}_3$  gilt

$$(f \circ g)^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega_1 : f(g(\omega)) \in C\} = \{\omega \in \Omega_1 : g(\omega) \in \underbrace{f^{-1}(C)}_{\in \mathcal{A}_2}\},$$

also  $(f \circ g)^{-1}(C) \in g^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$ . ■

Nachdem, wie gesagt, jede stetige Abbildung  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-messbar ist erhalten wir insbesondere:

**Beispiel 2.10** *Seien  $X_1, X_2, \dots, X_d$  Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ . Dann sind die folgenden Funktionen ebenfalls Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ :*

- $\sum_{i=1}^d a_i X_i$
- $\min(X_1, \dots, X_d), \max(X_1, \dots, X_d)$
- $\prod_{i=1}^d X_i$

$$\bullet \sum_{i=1}^d (X_i - a_i)^2$$

**Frage 2.11** Gibt es überhaupt Abbildungen  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ , die keine Zufallsvariable sind?

**Satz 2.12** Jeder  $d$ -dimensionale Zufallsvektor  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  induziert durch

$$P^X(B) := P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) \quad \text{für } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (2.6)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P^X$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Wir nennen  $P^X$  im Folgenden die Verteilung von  $X$  und schreiben im Falle von  $P^X = \mu$  auch  $X \sim \mu$ .

**Beweis:** Übungsaufgabe

**Definition 2.13** Für jeden  $d$ -dimensionale Zufallsvektor  $X = (X_1, \dots, X_d) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  heisst die Funktion  $F_X : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ , definiert durch

$$F_X(x_1, \dots, x_d) := P\left(\bigcap_{i=1}^d X_i^{-1}((-\infty, x_i])\right) \quad (2.7)$$

Verteilungsfunktion von  $X$ .

## Kapitel 3

# Absolute stetige Verteilungen

In der Vorlesung Stochastische Modellbildung haben Sie neben zahlreichen diskreten Verteilungen auch schon einige absolut stetige Verteilungen kennengelernt. Der folgende Abschnitt listet einige absolut stetige Verteilungen auf und formuliert relevante Eigenschaften. Wir starten mit der stetigen Gleichverteilung  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ : Setzen wir

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$$

dann gilt  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ , und, für  $[c, d] \subseteq [a, b]$

$$P^X([c, d]) = \int_{[c,d]} \frac{1}{b-a} dx = \int_{[c,d]} f(x) dx.$$

**Definition 3.1** Eine integrierbare<sup>†</sup> Funktion  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m = 1 \quad (3.1)$$

heißt Wahrscheinlichkeitsdichte.

Jede Wahrscheinlichkeitsdichte induziert ein Wahrscheinlichkeitsmaß - es gilt das folgende Lemma:

**Lemma 3.2** Sei  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte, dann ist durch

$$\mu_f \left( \prod_{i=1}^m (a_i, b_i] \right) = \int_{(a_m, b_m]} \int_{(a_{m-1}, b_{m-1}]} \dots \int_{(a_1, b_1]} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m \quad (3.2)$$

ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_f$  auf  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$  bestimmt.

**Beweis:** Für paarweise disjunkte Rechtecke  $(\prod_{i=1}^m (a_i^n, b_i^n])_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^m (a_i^n, b_i^n] \in \mathcal{I}_d$  rechnet man (mehr oder weniger) unschwer nach, dass

$$\mu_f \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^m (a_i^n, b_i^n] \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f \left( \prod_{i=1}^m (a_i^n, b_i^n] \right) \quad (3.3)$$

---

<sup>†</sup>integrierbar steht hier für Lebesgue integrierbar (siehe Maßtheorie/Analysis 3) und nicht für Riemann integrierbar; es reicht aber im Folgenden, an das schon aus dem Studium bekannte Riemann Integral denken; auch die erwähnten wichtigen Verteilungen haben alle Riemann integrierbare Dichten.

gilt. Unter Verwendung von Bemerkung 1.15 und Satz 1.11 folgt sofort das gewünschte Resultat.

**Definition 3.3** Ein  $m$ -dimensionaler Zufallsvektor  $X$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  (bzw. seine Verteilung  $P^X$ ) heißt absolut stetig wenn eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty)$  existiert, sodass  $P^X = \mu_f$  gilt. In diesem Fall schreiben wir kurz  $X \sim \mu_f$ .

**Bemerkung 3.4** (a) Für einen  $m$ -dimensionalen Zufallsvektor  $X$  mit  $X \sim \mu_f$  und  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$  gilt dann allgemein

$$P^X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \int_B f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m. \quad (3.4)$$

Für eine Zufallsvariable  $X$  mit  $X \sim \mu_f$  ergibt sich insbesondere für die Verteilungsfunktion  $F_X$ :

$$F_X(x) = P^X((-\infty, x]) = \int_{(-\infty, x]} f(t) dt. \quad (3.5)$$

Den Begriff der absolut stetigen Funktion kennen Sie auch schon aus der Analysis. Insbesondere ist für  $X \sim \mu_f$  also  $F$  absolut stetig im analytischen Sinne<sup>†</sup> und die Begriffsbildung ist konsistent. Wir werden in den folgenden Abschnitten noch näher auf Verteilungsfunktionen (und deren Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsmaßen) eingehen, begnügen uns vorerst aber mit Gleichung (3.5) und bemerken nur, dass für 'gute' Punkte die Gleichheit  $F'(x) = f(x)$  gilt.

**Beispiel 3.5** Wir betrachten die Funktion

$$f_\theta(x_1, x_2) = (1 + \theta(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)) \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x_1, x_2)$$

für  $\theta \in [-1, 1]$ . Offensichtlich gilt  $f_\theta(x_1, x_2) \geq 0$  sowie  $\int_{\mathbb{R}^2} f_\theta(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$ ,  $f_\theta$  ist also eine Wahrscheinlichkeitsdichte für jedes  $\theta \in [-1, 1]$ . Im Folgenden sei  $X = (X_1, X_2) \sim \mu_{f_\theta}$ .

(i) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\{X_1 \leq \frac{1}{2}\} = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq \frac{1}{2}\}$ :

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq \frac{1}{2}) &= P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq \frac{1}{2}\}) = P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq \frac{1}{2}, X_2(\omega) \in \mathbb{R}\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \underbrace{(-\infty, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}}_{=: B}\}) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} \int_B f_\theta(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{(-\infty, \frac{1}{2}]} \int_{\mathbb{R}} f_\theta(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_{[0, \frac{1}{2}]} \int_{[0, 1]} 1 + \theta(1 - 2x_1)(1 - 2x_2) dx_2 dx_1 = \int_{[0, \frac{1}{2}]} 1 dx_1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\{X_2 \leq X_1^2\}$  und setzen dafür  $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq x_1^2\}$ :

$$\begin{aligned} P(X_2 \leq X_1^2) &= P(\{\omega \in \Omega : X_2(\omega) \leq X_1^2(\omega)\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} \int_B f_\theta(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{[0, 1]} \int_{[0, x_1^2]} 1 + \theta(1 - 2x_1)(1 - 2x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \dots = \frac{1}{3} - \frac{\theta}{30} \end{aligned}$$

<sup>†</sup>i.e. für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  sodass für paarweise disjunkte Intervalle  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  mit  $\sum_{i=1}^n b_i - a_i < \delta$  gilt  $\sum_{i=1}^n F_X(b_i) - F_X(a_i) < \varepsilon$ .

**Frage 3.6** Gelte weiterhin  $(X_1, X_2) \sim \mu_{f_\theta}$  mit  $f_\theta$  aus Beispiel 3.5.

(iii) Wie können wir  $P(X_1 = X_2)$  im Kopf berechnen?

(iv) Wie können wir  $P(X_1 \leq X_2)$  im Kopf berechnen?

Erwartungswert und Varianz haben Sie schon in der Vorlesung Stochastische Modellbildung studiert - die folgenden Definitionen sind also nicht neu:

**Definition 3.7** Sei  $X$  eine absolut stetige Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Dichte  $f$ . Falls  $\int_{[0, \infty)} xf(x)dx < \infty$  oder  $\int_{(-\infty, 0]} |x|f(x)dx < \infty$  dann heisst die Größe

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$$

der Erwartungswert von  $X$ .

**Definition 3.8** Sei  $X$  eine absolut stetige Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Dichte  $f$ . Falls  $\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx < \infty$  dann heisst die Größe

$$\mathbb{V}(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)dx$$

die Varianz von  $X$ .

**Beispiel 3.9**  $\mathcal{U}(a, b)$  mit  $a < b$  ist, wie am Beginn dieses Abschnitts erwähnt, absolut stetig mit Dichte

$$f_{a,b}(x) := \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x). \quad (3.6)$$

Für  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$  erhalten wir unschwer (Übungsaufgabe)

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad \mathbb{V}X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

**Beispiel 3.10** Die wohl wichtigste Verteilung (Stichwort: Zentraler Grenzwertsatz) ist die eindimensionale Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , die die folgende Dichte hat:

$$\varphi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0) \quad (3.7)$$

Für  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  gilt (Übungsaufgabe)

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{und} \quad \mathbb{V}X = \sigma^2.$$

Weiters erfüllt die Normalverteilung folgende Transformationseigenschaft:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.8)$$

Im Folgenden bezeichnen wir, wie allgemein üblich, die Verteilungsfunktion von  $\mathcal{N}(0, 1)$  mit  $\Phi$ , i.e.  $\Phi(x) = \int_{(-\infty, x]} \varphi_{0,1}(t)dt$ .



**Beispiel 3.11** Offensichtlich ist für jedes  $\theta > 0$  die Funktion  $f_\theta$ , definiert durch

$$f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x) \quad (3.9)$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Die zugehörige Verteilung heisst *Exponentialverteilung*, wir schreiben  $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ . Es lässt sich einfach nachrechnen, dass die Verteilungsfunktion  $F_\theta$  gegeben ist durch  $F_\theta(x) = 1 - e^{-\theta x}$ , und dass für Erwartungswert und Varianz von  $X \sim \mathcal{E}(\theta)$  gilt:

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\theta} \quad \text{und} \quad \mathbb{V}X = \frac{1}{\theta^2}.$$

**Satz 3.12** Sei  $X$  eine nichtnegative Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion  $F(x) = P(X \leq x)$ . Dann ist  $X$  exponentialverteilt (i.e.  $\exists \theta$  sodass  $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ ) genau dann, wenn für alle  $t, s \geq 0$  die folgende Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit gilt<sup>†</sup>:

$$P(X \geq s + t) = P(X \geq s)P(X \geq t) \quad (3.10)$$

**Beweis:** Übungsaufgabe

**Beispiel 3.13** Die Funktion  $f_k$ , definiert durch

$$f_k(x) = \frac{1}{2\Gamma(k/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k/2-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x) \quad (3.11)$$

ist für jedes  $k \in \mathbb{N}$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Die zugehörige Verteilung heisst *Chi-quadratverteilung mit  $k$  Freiheitsgraden*, wir schreiben  $X \sim \chi(k)$ . Für Erwartungswert und Varianz gilt

$$\mathbb{E}X = k \quad \text{und} \quad \mathbb{V}X = 2k.$$

Die Chiquadratverteilung  $\chi(1)$  ergibt sich in natürlicher Weise aus der Normalverteilung - es gilt das folgende einfache Resultat:

**Lemma 3.14** Ist  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , dann gilt  $X^2 \sim \chi(1)$ .

**Beweis:** Direktes Nachrechnen: Wir setzen  $Y = X^2$ , dann gilt für festes  $x \in [0, \infty)$  offensichtlich

$$F_Y(x) = P(X^2 \leq x) = P^X([- \sqrt{x}, \sqrt{x}]) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1.$$

Nachdem  $\Phi$  stetig differenzierbar (sogar  $C^\infty$ ) ist, folgt durch Differentiation für  $x > 0$

$$F'_Y(x) = 2\varphi_{0,1}(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Letzteres ist aber genau die Dichte von  $\chi(1)$ . ■

<sup>†</sup>Wir schreiben hier und im Folgenden kurz  $P(X \geq s)$  für  $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq s\}) = P^X([s, \infty))$

**Beispiel 3.15** Die Funktion  $l_{\mu, \sigma^2}$ , definiert durch

$$l_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x) \quad (3.12)$$

ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte für  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma > 0$ . Die zugehörige Verteilung heisst *Logarithmische Normalverteilung*, wir schreiben  $X \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$ . Für Erwartungswert und Varianz gilt

$$\mathbb{E}X = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{und} \quad \mathbb{V}X = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

Der Name Logarithmische Normalverteilung ist nicht zufällig gewählt - es gilt das folgende einfache Resultat:

**Lemma 3.16**  $X \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$  dann und nur dann wenn  $\ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

**Beweis:** Direktes Nachrechnen.

**Beispiel 3.17** Die Funktion  $f_{\alpha, \beta}$ , definiert durch ( $B(\alpha, \beta)$  bezeichnet die Betafunktion aus der Analysis)

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \quad (3.13)$$

ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte für  $\alpha, \beta > 0$ . Die zugehörige Verteilung heisst *Betaverteilung*, wir schreiben  $X \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta)$ . Für Erwartungswert und Varianz gilt

$$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{und} \quad \mathbb{V}X = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}.$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem folgenden nützlichen Resultat im eindimensionalen Fall.

**Satz 3.18 (Transformationssatz für Dichten)** Sei  $X$  eine absolut stetige Zufallsvariable mit Dichte  $f$  und  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $T' \neq 0$  und gelte  $T(\mathbb{R}) = (a, b)^\dagger$ . Dann ist  $Y := T \circ X$  ebenfalls absolut stetig mit Dichte

$$g(z) = \frac{f(T^{-1}z)}{|T'(T^{-1}(z))|} \mathbf{1}_{(a,b)}(z)$$

**Beweis:** Direkte Folgerung aus der Kettenregel: Ist  $T$  strikt wachsend, dann gilt

$$P(T \circ X \leq x) = P(X \leq T^{-1}x) = \int_{(-\infty, T^{-1}x]} f(z) dz,$$

und Differentiation (Kettenregel) liefert das gewünschte Resultat. Für  $T$  strikt fallend kann analog vorgegangen werden. ■

<sup>†</sup>das Intervall ist nicht notwendigerweise endlich

# Kapitel 4

## Verteilungsfunktionen

### 4.1 Eindimensionaler Fall

Wir beginnen mit dem eindimensionalen Fall, den Sie schon aus der Vorlesung Stochastische Modellbildung kennen: Gemäß Definition 2.13 ist für jede Zufallsvariable  $X$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  die Verteilungsfunktion  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definiert durch (für  $\mu = P^X$  schreiben wir auch gelegentlich  $F_\mu$  statt  $F_X$ ):

$$F_X(x) := P^X((-\infty, x]) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) \quad (4.1)$$

$F_X$  hat die folgenden Eigenschaften:

**Lemma 4.1** *Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann hat die Verteilungsfunktion  $F_X$  die folgenden Eigenschaften:*

(F1)  $F_X$  ist monoton wachsend und rechtsstetig.

(F2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ .

**Beweis:** Einfache Übungsaufgabe.

**Definition 4.2**  $\mathcal{F}$  bezeichnet im Folgenden die Familie aller monoton wachsenden, rechtsstetigen Funktionen  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , die  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  erfüllen.

Für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\mu = P^X$  auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  gilt also  $F_X \in \mathcal{F}$ . Umgekehrt gilt das folgende Resultat:

**Lemma 4.3** *Sei  $F \in \mathcal{F}$ . Dann ist durch*

$$\mu_F((a, b]) := F(b) - F(a) \quad (4.2)$$

*ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  definiert.*

**Beweis:** Gemäss Satz 1.11 reicht es,  $\sigma$ -Additivität auf  $\mathcal{I}_1$  zu zeigen. Siehe Appendix.

Insgesamt erhalten wir folgendes Resultat:

**Satz 4.4** *Jede Verteilungsfunktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  entspricht einem eindeutigen Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  und umgekehrt. Als Konsequenz daraus nennen wir  $\mathcal{F}$  die Familie aller (eindimensionalen) Verteilungsfunktionen und schreiben auch  $X \sim F$ .*

Sei  $X$  eine *diskrete Zufallsvariable* mit Wertebereich  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ . Dann existieren paarweise disjunkte Menge  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  mit  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ , sodass sich  $X$  in der Form

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega).$$

darstellen lässt (warum?). Offensichtlich gilt  $X(\omega) \leq x$  genau dann, wenn  $\omega \in A_i$  für ein  $i$  mit  $\alpha_i \leq x$ . Für die Verteilungsfunktion  $F_X$  ergibt sich damit unmittelbar

$$F_X(x) = P^X((-\infty, x]) = P\left(\bigcup_{i:\alpha_i \leq x} A_i\right) = \sum_{i:\alpha_i \leq x} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \mathbf{1}_{[\alpha_i, \infty)}(x). \quad (4.3)$$

Wegen  $F_X(\alpha_i) - F_X(\alpha_i-)^\dagger = P(A_i) = P^X(\{\alpha_i\})$  ist also jedes  $\alpha_i$  mit  $P^X(\{\alpha_i\}) > 0$  Sprungstelle von  $F_X$ . Wir nennen  $F \in \mathcal{F}$  naheliegenderweise *diskrete Verteilungsfunktion*, wenn  $F$  von der Form (4.3) ist.

Ist  $X$  hingegen *absolut stetig*, dann ist die Verteilungsfunktion  $F_X$ , wie im vorigen Abschnitt erwähnt, sogar absolut stetig, also insbesondere stetig.

Ist jede Funktion aus  $\mathcal{F}$  entweder von der Form (4.3) oder absolut stetig, oder eine Kombination der beiden Typen? Die Antwort auf diese Frage ist 'nein', i.e. es gibt Verteilungsfunktionen, die weder diskret noch absolut stetig noch eine Kombination der beiden Typen sind. Diese Funktionen  $F$  tragen den Namen *singuläre Verteilungsfunktionen* und sind insbesondere vom analytischen (oder maßtheoretischen) Standpunkt, weniger aber vom rein statistischen Standpunkt aus, interessant, da sie einerseits stetig sind, aber andererseits fast überall<sup>†</sup>  $F' = 0$  gilt. Die wohl bekannteste singuläre Verteilungsfunktion ist die Cantor Funktion  $C_\infty$  (oft auch 'devil's staircase' genannt);

**Beispiel 4.5 (Exkursion: Konstruktion der Cantorfunktion  $C_\infty$ )** Wir betrachten  $\mathcal{F}_0$ , definiert durch

$$\mathcal{F}_0 := \{F \in \mathcal{F} : F(0) = 0, F(1) = 1 \text{ und } F \text{ stetig}\},$$

versehen mit der Maximumsmetrik  $d_\infty$  (siehe Analysis), sowie die Abbildung  $\Phi : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0$ , definiert durch (eine Skizze für  $F(x) = x$  hilft):

$$(\Phi(F))(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F(3x) & \text{für } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x - 2) & \text{für } x \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Wir zeigen nun, dass ein  $C_\infty \in \mathcal{F}_0$  existiert, sodass für jedes  $F \in \mathcal{F}_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(\Phi^n F, C_\infty) = 0 \quad (4.4)$$

gilt, und beweisen dann, dass  $C_\infty$  singulär ist.

(Schritt 1): Aus der Analysis ist bekannt, dass  $(C([0, 1]), d_\infty)$  vollständig (also ein Banachraum) ist.  $\mathcal{F}_0$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $(C([0, 1]), d_\infty)$ , daher ist auch  $(\mathcal{F}_0, d_\infty)$  vollständig. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass  $\Phi$  eine Kontraktion auf  $(\mathcal{F}_0, d_\infty)$  ist, und dann

<sup>†</sup> $F_X(a-)$  bezeichnet den linksseitigen Grenzwert von  $F_X$  an der Stelle  $a$

<sup>†</sup>im Sinne des Lebesgue'schen Maßes  $\lambda$ , i.e. es existiert eine Menge  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit  $\lambda(A) = 0$  sodass  $F'(x) = 0$  für alle  $x \in A^c$

den Banach'schen Fixpunktsatz anzuwenden.

(Schritt 2): Seien  $F, G \in \mathcal{F}_0$  beliebig. Für  $x \in [0, \frac{1}{3}]$  gilt nach Konstruktion

$$|\Phi(F)(x) - \Phi(G)(x)| = \left| \frac{1}{2}F(3x) - \frac{1}{2}G(3x) \right| \leq \frac{1}{2} d_\infty(F, G).$$

Analog gilt für  $x \in [\frac{2}{3}, 1]$

$$|\Phi(F)(x) - \Phi(G)(x)| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x - 2) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}G(3x - 2) \right| \leq \frac{1}{2} d_\infty(F, G).$$

Wegen  $\Phi(F) = \Phi(G)$  auf  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  folgt also insgesamt  $d_\infty(\Phi(F), \Phi(G)) \leq \frac{1}{2} d_\infty(F, G)$ . Nachdem  $F$  und  $G$  beliebig waren, haben wir also gezeigt, dass  $\Phi$  eine Kontraktion auf  $(\mathcal{F}_0, d_\infty)$  (mit Kontraktionsfaktor  $\frac{1}{2}$ ) ist.

(Schritt 3): Direkte Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes liefert die Existenz einer Verteilungsfunktion  $C_\infty \in \mathcal{F}_0$ , für die Gleichung (4.4) gilt. Es bleibt daher nur noch die Singularität von  $C_\infty$  zu beweisen. Bezeichnen wir die (schon in der Vorlesung erwähnte) Cantor Menge mit  $C^*$ , dann lässt sich leicht überprüfen, dass für jedes offene Intervall  $I$  aus  $B := [0, 1] \setminus C^*$  die Funktion  $\Phi^n(F)$  ab einem Index konstant ist, und zwar für jedes  $F \in \mathcal{F}_0$ . Daher ist auch  $C_\infty$  auf  $I$  konstant und es folgt  $C'_\infty = 0$  auf  $I$ . Da für jedes  $x \in B$  ein offenes Intervall  $I$  mit  $x \in I \subseteq B$  existiert, folgt  $C'_\infty(x) = 0$  für jedes  $x \in B$ . Wegen  $\lambda(C^*) = 0$  gilt  $\lambda(B) = 1$  und die Konstruktion ist komplett.

**Bemerkung 4.6** Die Cantorfunktion ist eine relativ 'brave' singuläre Funktion in dem Sinne, dass  $C_\infty$  zumindest nicht strikt wachsend ist. Es können aber auch stetige Verteilungsfunktionen  $F$  mit  $F' = 0$  fast überall konstruiert werden, die sogar strikt wachsend sind. Das wohl bekannteste Beispiel (1904) ist Minkowski's Fragezeichenfunktion  $?(x)$ , die ihrerseits in engem Zusammenhang mit der Kettenbruchentwicklung reeller Zahlen steht. Generell sind Ziffernentwicklungen und Fraktale zwei der Hauptwerkzeuge um singuläre Funktionen zu konstruieren (aktives Forschungsgebiet, interessantes Thema für Bachelorarbeit).

**Satz 4.7 (Zerlegungssatz)** *Jede Verteilungsfunktion  $F \in \mathcal{F}$  lässt sich schreiben als Konvexkombination einer diskreten, einer absolut stetigen und einer singulären Verteilungsfunktion, i.e. es existieren  $a, b, c \in [0, 1]$  mit  $a + b + c = 1$  und eine diskrete Verteilungsfunktion  $F_{dis}$ , eine absolut stetige Verteilungsfunktion  $F_{abs}$  und eine singuläre Verteilungsfunktion  $F_{sing}$  mit  $F = aF_{dis} + bF_{abs} + cF_{sing}$*

**Beweis:** Übersteigt leider den Rahmen dieser Vorlesung, siehe Maßtheorie oder [2, 4, 5, 7].

**Bemerkung 4.8** Um für eine gegebene Verteilungsfunktion  $F \in \mathcal{F}$  festzustellen, ob sie einen diskreten, absolut stetigen oder singulären Anteil hat, ist es oft hilfreich, wie folgt vorzugehen. (i) Alle Sprungstellen der Funktion und die entsprechenden Sprunghöhen bestimmen den diskreten Anteil - hat  $F$  keine Unstetigkeitsstellen so hat  $F$  keinen diskreten Anteil (i.e.  $a = 0$  für  $a$  in Satz 4.7. (ii) Die Ableitung  $f$  von  $F'$  (wo immer definiert und  $> 0$ ) bestimmt den absolut stetigen Anteil  $F_{abs}$  und den Parameter  $b$ . Sind  $a, F_{dis}, b, F_{abs}$  bekannt, kann  $c$  und  $F_{sing}$  direkt aus  $F = aF_{dis} + bF_{abs} + cF_{sing}$  berechnet werden.

Für jedes sample  $x_1, \dots, x_n$  ist die empirische Verteilung  $\hat{\mu}_n$  und die empirische Verteilungsfunktion  $\hat{F}_n$  definiert durch

$$\hat{\mu}_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_A(x_i) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{4.5}$$

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(x_i) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Beachten Sie, dass dies genau der diskreten Gleichverteilung auf  $\{x_1, \dots, x_n\}$  entspricht. Offensichtlich ist  $\hat{F}_n$  eine diskrete Verteilungsfunktion.

## 4.2 Stichprobenerzeugung

Nicht nur für die Entwicklung und Validierung neuer Verfahren der schließenden Statistik sondern auch ganz allgemein zur Schärfung des statistischen Grundverständnisses ist es essentiell, Stichproben  $x_1, \dots, x_n$  von Zufallsvariablen  $X \sim F$  für beliebiges  $F$  erzeugen zu können. Stichproben der gängigsten (diskreten oder absolut stetigen) Verteilung können unschwer in  $\mathbb{R}$  erzeugt werden - in der Praxis treten jedoch auch andere Verteilungen, insbesondere Mischungen diskreter und absolut stetiger Verteilungen auf. Im Folgenden überlegen wir uns daher allgemein, wie Stichproben von Zufallsvariablen  $X \sim F$  für beliebiges  $F$  unter Zuhilfenahme der uniformen Gleichverteilung  $\mathcal{U}(0, 1)$  erzeugt werden können und starten mit einem einfachen Beispiel:

**Beispiel 4.9** Wir erzeugen Stichproben von  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ; wie in Kapitel 3 bezeichne  $\Phi$  die Verteilungsfunktion von  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Sei  $Z \sim \mathcal{U}(0, 1)$ , dann erhalten wir für die Verteilungsfunktion  $F_X$  von  $X = \Phi^{-1}(Z)$  (warum ist  $X$  Zufallsvariable?).

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\Phi^{-1}(Z) \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : \Phi^{-1}(Z(\omega)) \leq x\}) \\ &\stackrel{\Phi \text{ strikt wachsend}}{=} P(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \leq \underbrace{\Phi(x)}_{\in [0,1]}\}) = F_Z(\Phi(x)) = \Phi(x) \end{aligned}$$

Nachdem  $x \in \mathbb{R}$  beliebig war, folgt sofort  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Stichproben  $x_1, \dots, x_n$  von  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  können also wie folgt erzeugt werden:

- (S1) Erzeuge eine Stichprobe  $z_1, \dots, z_n$  von  $Z \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
- (S2) Betrachte  $x_1 := \Phi^{-1}(z_1), \dots, x_n := \Phi^{-1}(z_n)$

Die in Beispiel 4.9 verwendete Idee kann sofort auf beliebige Fälle  $X \sim F$  übertragen werden, in denen  $F$  strikt wachsend ist. Verteilungsfunktion sind aber im Allgemeinen nicht streng monoton wachsend - es ist daher notwendig, mit Quasiinversen (anstatt mit Inversen) zu arbeiten:

**Definition 4.10** Für jede Verteilungsfunktion  $F$  ist die Quasiinverse (oft auch Pseudo- oder Linksinverse)  $F^- : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch ( $\inf \emptyset := \infty$ )

$$F^-(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}. \tag{4.7}$$

Der Wert  $F^-(p)$  heißt  $p$ -Quantil von  $F$ ,  $F^-(0.5)$  heißt Median.

**Bemerkung 4.11** Falls  $F \in \mathcal{F}$  injektiv ist, dann gilt natürlich  $F^- = F^{-1}$

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Eigenschaften von  $F^-$  zusammen:

**Satz 4.12** Seien  $F, G$  Verteilungsfunktionen und ihre Quasiinverse  $F^-, G^-$  definiert durch (4.7). Dann sind  $F^-, G^-$  monoton wachsend und für  $y \in (0, 1)$  gelten die folgenden Aussagen:

1.  $F^-(y) = \min\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$ .
2.  $F^-(y) \leq x$  dann und nur dann wenn  $y \leq F(x)$ .
3.  $F^-(F(x)) \leq x \leq F^-(F(x)+)$ .
4.  $F(F^-(y)-) \leq y \leq F(F^-(y))$  [Für stetiges  $F$  gilt also  $F \circ F^-(y) = y$ ]
5.  $F^-$  ist linksstetig.
6.  $F^- \circ F \circ F^- = F^-$ .
7.  $F \circ F^- \circ F = F$ .
8.  $(G \circ F)^- = F^- \circ G^-$ .
9. Es gilt  $P(F^- \circ F \circ X = X) = 1$ .

**Beweis:** Monotonie von  $F^-, G^-$  folgt direkt aus der Definition, Rechtsstetigkeit von  $F$  impliziert Punkt 1. Die zweite Aussage lässt sich wie folgt zeigen: Ist  $F^-(y) > x$ , dann muss offensichtlich  $y > F(x)$  gelten. Umgekehrt folgt aus  $F(x) < y$  und Rechtsstetigkeit von  $F$  unmittelbar  $x < F^-(y)$ . Der Beweis der restlichen Punkte ist eine Übungsaufgabe. ■

Die Wichtigkeit der Pseudoinversen für die Stichprobenerzeugung wird durch folgendes Resultat unterstrichen:

**Satz 4.13** Es gelten die folgenden beiden Aussagen:

1. Ist  $X \sim F$  und  $F \in \mathcal{F}$  stetig dann gilt  $F \circ X \sim \mathcal{U}(0, 1)$ . ( $F \circ X$  wird meist als probability integral transform (PIT) bezeichnet)
2. Ist  $Z \sim \mathcal{U}(0, 1)$  und  $F \in \mathcal{F}$  beliebig, dann folgt  $F^- \circ Z \sim F$ .

**Beweis:** Als monoton wachsende Funktion ist  $F$  Borel messbar (Übungsaufgabe) und Satz 2.9 impliziert, dass  $F \circ X$  eine Zufallsvariable ist. Unter Verwendung von Satz 4.12 und der Stetigkeit von  $F$  folgt für  $y \in (0, 1)$

$$P(F \circ X < y) \stackrel{4.12(2)}{=} P(X < F^-(y)) = P(X \leq F^-(y)) = F \circ F^-(y) \stackrel{4.12(4)}{=} y.$$

Wegen  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, y + \frac{1}{n}) = (-\infty, y]$  und der Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen (Lemma 1.7) erhalten wir damit insgesamt

$$P(F \circ X \leq y) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(F \circ X < y + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y + \frac{1}{n}) = y,$$

woraus die erste Aussage folgt.

Die zweite Aussage ist eine direkte Konsequenz von Punkt 2. in Satz 4.12:

$$P(F^- \circ Z \leq x) = P(Z \leq F(x)) = F(x) \quad \blacksquare$$

**Frage 4.14** Kann  $F \circ X \sim \mathcal{U}(0, 1)$  auch für unstetiges  $F$  gelten?

**Beispiel 4.15** Wir betrachten zur Veranschaulichung von  $F^-$  das folgende sehr einfache Beispiel (weitere Beispiele in den Übungen). Sei  $p \in (0, 1)$  und die Verteilungsfunktion  $F$ , definiert durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - p & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Dann ergibt sich für die Quasiinverse sofort

$$F^-(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \in (0, 1 - p] \\ 1 & \text{für } y \in (1 - p, 1]. \end{cases}$$

Für  $Z \sim \mathcal{U}(0, 1)$  hat die Zufallsvariable  $F^- \circ Z$  gemäß Satz 4.13 dann genau die Verteilungsfunktion  $F$ . Wie würden Sie Stichproben von  $X \sim F$  ausgehend von  $Z \sim \mathcal{U}(0, 1)$  ohne Satz 4.13 erzeugen?

**Beispiel 4.16** Wir betrachten die Verteilungsfunktion  $F$  der *Cauchy Verteilung*, definiert durch

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Offensichtlich ist  $F$  stetig differenzierbar und wir erhalten als Dichte

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}.$$

$F$  ist strikt monoton wachsend und wir erhalten für die Quasiinverse

$$F^-(y) = F^{-1}(y) = \tan\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)\pi\right), \quad y \in (0, 1).$$

Als direkte Konsequenz von Satz 4.13 ist für  $Z \sim \mathcal{U}(0, 1)$  die Zufallsvariable  $F^- \circ Z$  Cauchyverteilt. Beachten Sie, dass für eine Cauchyverteilte Zufallsvariable  $X$  der Erwartungswert nicht existiert (warum?).

**Beispiel 4.17** Wir betrachten die Verteilungsfunktion  $F_{\alpha, \beta}$  der *Paretoverteilung* (wir schreiben  $\mathcal{P}(\alpha, \beta)$ ), definiert durch ( $\alpha, \beta > 0$ )

$$F_{\alpha, \beta}(x) = \left(1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta\right) \mathbf{1}_{(\alpha, \infty)}(x). \quad (4.9)$$

Offensichtlich ist  $F$  stetig differenzierbar und wir erhalten als Dichte

$$f(x) = F'(x) = \beta \frac{\alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \mathbf{1}_{(\alpha, \infty)}(x).$$

$F$  ist strikt monoton wachsend und wir erhalten für die Quasiinverse

$$F^-(y) = F^{-1}(y) = \alpha(1 - y)^{-\frac{1}{\beta}} \quad y \in (0, 1).$$

Als direkte Konsequenz von Satz 4.13 ist für  $Z \sim \mathcal{U}(0, 1)$  die Zufallsvariable  $F^- \circ Z \sim \mathcal{P}(\alpha, \beta)$ .



### 4.3 Multivariate Verteilungsfunktionen

Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den zweidimensionalen Fall und beginnen analog zum vorigen Abschnitt mit dem folgenden Lemma:

**Lemma 4.18** Sei  $X = (X_1, X_2)$  ein 2-dimensionaler Zufallsvektor auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann hat die Verteilungsfunktion (siehe Gleichung 2.7)  $F_X : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ , definiert durch

$$F_X(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

die folgenden Eigenschaften:

(F1)  $F_X$  ist rechtsstetig, i.e. für monoton fallende Folgen  $(x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert  $x_1$  bzw.  $x_2$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_1^n, x_2^n) = F_X(x_1, x_2)$ .

(F2)  $\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F_X(x_1, x_2) = 0 = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} F_X(x_1, x_2)$ ;  $\lim_{x_1, x_2 \rightarrow \infty} F_X(x_1, x_2) = 1$ .

(F3) Für Intervalle  $(a_1, a_2], (b_1, b_2]$  gilt

$$F_X(a_2, b_2) - F_X(a_1, b_2) - F_X(a_2, b_1) + F_X(a_1, b_1) \geq 0.$$

**Beweis:** Direktes Nachrechnen, Übungsaufgabe.

**Definition 4.19**  $\mathcal{F}_2$  bezeichnet im Folgenden die Menge aller Funktionen  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ , die die Punkte (F1), (F2), (F3) aus Lemma 4.18 erfüllen.

**Lemma 4.20** Sei  $F \in \mathcal{F}_2$ . Dann ist durch

$$\mu_F((a_1, a_2] \times (b_1, b_2]) := F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$$

ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  definiert.

**Beweis:** Analog dem Beweis von Lemma 4.3.

**Satz 4.21** Jede Verteilungsfunktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  entspricht einem eindeutigen Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$  und umgekehrt. Als Konsequenz daraus nennen wir  $\mathcal{F}_2$  die Familie aller zweidimensionalen Verteilungsfunktionen.

**Bemerkung 4.22** Im Folgenden werden wir (um die Notation möglichst einfach zu halten) 2-dimensionale Verteilungsfunktionen auch oft mit  $H$  bezeichnen.

**Beispiel 4.23** Wir betrachten  $F, G \in \mathcal{F}$  und definieren

$$H_1(x, y) = \min\{F(x), G(y)\}, \quad H_2(x, y) = F(x)G(y).$$

Dann rechnet man unschwer nach, dass sowohl  $H_1$  als auch  $H_2$  zweidimensionale Verteilungsfunktionen sind.

**Bemerkung 4.24** Beachten Sie, dass für  $X = (X_1, X_2) \sim H$ , die Verteilungsfunktionen  $F$  und  $G$  von  $X_1$  und  $X_2$  (die sogenannten *Randverteilungen*) direkt aus der gemeinsamen Verteilungsfunktion  $H$  berechnet werden können - es gilt nämlich

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x, Y \leq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(x, n) =: H(x, \infty) \\ G(y) &= P(Y \leq y) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq n, Y \leq y) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n, y) =: H(\infty, y). \end{aligned}$$

**Frage 4.25** Wie vorhin gelte  $(X_1, X_2) \sim H$ . Offensichtlich können  $F$  und  $G$  aus  $H$  berechnet werden. Gilt dies auch umgekehrt?

Hinweis: Berechnen Sie für  $H_1, H_2$  in Beispiel 4.23 die Randverteilungen - was ist zu erkennen?

**Beispiel 4.26** Gegeben ist die Funktion  $H(x, y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-2y})$ . Dann ist  $H$  eine 2-dimensionale Verteilungsfunktion (warum?), die  $H(x, y) = 0$  für  $\min\{x, y\} \leq 0$  erfüllt. Zusätzlich ist  $H$  offensichtlich stetig. Wir berechnen  $\mathbb{P}(Y \leq X)$  für  $(X, Y) \sim H$  und bestimmen dafür zuerst die Dichte  $f$  von  $(X, Y)$  für  $x, y > 0$  mittels

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}.$$

Insgesamt erhalten wir daher

$$f(x, y) = 2e^{-(x+2y)} \mathbf{1}_{[0, \infty)^2}(x, y).$$

Offensichtlich ist  $f$  eine 2-dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann daher sofort berechnet werden durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq X) &= \mathbb{P}^{(X, Y)}\left(\underbrace{\{(x, y) \in [0, \infty)^2 : y \leq x\}}_{=: B}\right) = \int_B f d\lambda_2 \\ &= \int_{[0, \infty)} \int_{[0, x]} f(t, s) d\lambda(s) d\lambda(t) = \dots = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Beispiel 4.27 (Fortsetzung von Beispiel 4.26)** Gelte wiederum  $(X, Y) \sim H$  mit  $H$  aus Beispiel 4.26. Als nächstes berechnen wir die Verteilungsfunktionen  $F$  von  $X_1$  und  $G$  von  $X_2$  mit Hilfe von Bemerkung 4.24: Für  $x < 0$  gilt offensichtlich  $F(x) = 0$  und für  $x \geq 0$  erhalten wir

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(x, n) = 1 - e^{-x}.$$

Analog ergibt sich  $G(y) = 0$  für  $y < 0$  sowie

$$G(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n, y) = 1 - e^{-2y}$$

für  $y > 0$ . Mit anderen Worten:  $X \sim \mathcal{E}(1)$  und  $Y \sim \mathcal{E}(2)$ . Zusätzlich gilt offensichtlich auf ganz  $\mathbb{R}^2$  die Gleichheit  $H(x, y) = F(x)G(y)$ , i.e. die gemeinsame Verteilungsfunktion ist das Produkt der Randverteilungsfunktionen. Schreiben wir  $\Pi(u, v) = uv$  für  $u, v \in [0, 1]$ , dann gilt also

$$H(x, y) = \Pi(F(x), G(y)) \tag{4.10}$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . Die Verteilungsfunktion  $H$  lässt sich also zerlegen in die Randverteilungen  $F, G$  und eine 'Verknüpfung' selbiger.

M. Fréchet studierte Anfang der 1950er Jahre die Frage, wie, für Zufallsvariable  $X_1$  und  $X_2$  mit Verteilungsfunktion  $F$  bzw.  $G$  alle Verteilungsfunktionen  $H$  des Vektors  $(X_1, X_2)$  aussehen können. Zur Beantwortung dieser Frage führte A. Sklar 1959 den folgenden Begriff ein:

**Definition 4.28** Eine Copula ist eine Funktion  $A : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\forall x \in [0, 1] : A(x, 1) = A(1, x) = x, A(x, 0) = A(0, x) = 0.$
2. Für  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$  und  $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$  gilt

$$A(x_2, y_2) - A(x_1, y_2) - A(x_2, y_1) + A(x_1, y_1) \geq 0. \quad (4.11)$$

$\mathcal{C}$  bezeichnet im Folgenden die Familie aller Copulas.

**Beispiel 4.29** Die folgenden Funktionen sind Copulas (direkt nachzurechnen):

$$M(x, y) = \min\{x, y\}, \quad \Pi(x, y) = xy, \quad W(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$$

**Lemma 4.30** Jede Copula  $A$  hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $A$  ist monoton wachsend in jeder Koordinate.
2. Für  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$  gilt

$$|A(x_2, y_2) - A(x_1, y_1)| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|. \quad (4.12)$$

**Beweis:** Beide Aussagen folgen aus der Eigenschaft (4.11): Betrachten wir zum Beispiel  $x_1 = 0$ , dann folgt wegen

$$0 \leq A(x_2, y_2) - A(0, y_2) - A(x_2, y_1) + A(0, y_1) = A(x_2, y_2) - A(x_2, y_1)$$

unmittelbar die Monotonie von  $A$  bezüglich der  $y$ -Koordinate. Monotonie bezüglich  $x$  folgt analog. Betrachten wiederum Eigenschaft (4.11) für  $x = x_1$  und  $x_2 = 1$  sowie  $y_1 \leq y_2$ , dann folgt sofort

$$A(1, y_2) - A(x, y_2) - A(1, y_1) + A(x, y_1) \geq 0$$

und damit  $A(x, y_2) - A(x, y_1) \leq y_2 - y_1$ . Die Ungleichung  $A(x_2, y) - A(x_1, y) \leq x_2 - x_1$  für  $x_1 \leq x_2$  und  $y \in [0, 1]$  folgt analog. Anwendung der Dreiecksungleichung liefert insgesamt (4.12). ■

**Satz 4.31 (Satz von Sklar)** Gelte  $X = (X, Y) \sim H$ , sowie  $X \sim F$  und  $Y \sim G$ . Dann existiert eine Copula  $A \in \mathcal{C}$  sodass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  die folgende Gleichheit gilt:

$$H(x, y) = A(F(x), G(y)).$$

Falls  $F$  und  $G$  stetig sind, ist die Copula  $A$  eindeutig<sup>†</sup>.

Umgekehrt ist für jede Copula  $A \in \mathcal{C}$  und  $F, G \in \mathcal{F}$  die Funktion  $H(x, y) = A(F(x), G(y))$  eine zweidimensionale Verteilungsfunktion.

**Beweis:** Entfällt (obwohl nicht schwierig) - freiwillige Übungsaufgabe für Interessierte.

Gelte  $(X, Y) \sim H$ ,  $X \sim F, Y \sim G$  und seien  $T, S$  strikt wachsende, stetige Abbildungen auf  $\mathbb{R}$ . Anhang von einfachen Beispielen überlegt man sich leicht, dass im Allgemeinen weder  $\tilde{X} := T \circ X \sim F$  noch  $\tilde{Y} := S \circ Y \sim G$  oder  $(T \circ X, S \circ Y) \sim H$  gelten muss. Was sich jedoch nicht ändert ist die zugrundeliegende Copula - es gilt folgender Satz:

<sup>†</sup>Wir nennen  $A$  dann die  $(X, Y)$  (bzw. die  $H$ ) zugrundeliegende Copula

**Satz 4.32 (Transformationsinvarianz von Copulas)** *Gelte  $(X, Y) \sim H$ ,  $X \sim F$ ,  $Y \sim G$  und seien  $F$  und  $G$  stetig. Weiters seien  $T, S$  strikt wachsende, stetige Abbildungen auf  $\mathbb{R}$ . Dann ist die  $(X, Y)$  und die  $(T \circ X, S \circ Y)$  zugrundeliegende Copula gleich.*

**Beweis:** Übungsaufgabe. Hinweis: Es genügt, die Verteilungsfunktion von  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  sowie die entsprechenden Randverteilungsfunktionen zu berechnen und dann einen Blick auf Satz 4.31 zu werfen.

**Bemerkung 4.33** Copulas sind auch in der Praxis (insbesondere, aber nicht nur, im Finanzsektor, Stichwort Risk Management) sehr wichtig, da sich Abhängigkeiten von Zufallsvariablen über Copulas vollständig modellieren und analysieren lassen  $\rightarrow$  aktives Forschungsgebiet mit vielen offenen Problemstellungen, siehe [Copulas\\_Anwendungsbeispiel.pdf](#) auf [www.trutschnig.net/courses](http://www.trutschnig.net/courses).

## Kapitel 5

# Erwartungswerte

Wir haben bisher Erwartungswerte nur für diskrete und für absolut stetige Zufallsvariable definiert und berechnet. Ziel dieses Abschnitts ist die Erweiterung des Begriffs des Erwartungswerts auf beliebige Zufallsvariable<sup>†</sup>. Diese Erweiterung wird einerseits das 'Rechnen' mit Erwartungswerten (und höheren Momenten) erleichtern und andererseits sicherstellen, dass alle in den folgenden Kapiteln verwendeten Konzepte wohlfundiert sind.

Wir starten mit einem ersten Resultat, das zeigt, dass Grenzwerte von Folgen von Zufallsvariablen wieder Zufallsvariable sind und zeigen nachfolgend, dass beliebige Zufallsvariable durch sehr einfache (schon bekannte) Zufallsvariable approximiert werden können.

**Satz 5.1** *Seien  $X_1, X_2, X_3, \dots (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  Zufallsvariable und die Funktionen  $\underline{Y}, \bar{Y}, \underline{X}, \bar{X} : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  definiert durch*

$$\begin{aligned}\underline{Y}(\omega) &:= \inf_{i \in \mathbb{N}} X_i(\omega), & \bar{Y}(\omega) &:= \sup_{i \in \mathbb{N}} X_i(\omega) \\ \underline{X}(\omega) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} X_k(\omega) \\ \bar{X}(\omega) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} X_k(\omega).\end{aligned}\tag{5.1}$$

*Falls  $\underline{Y}$  nur endliche Werte annimmt, dann ist  $\underline{Y}$  ebenfalls eine Zufallsvariable. Selbige Implikation gilt für  $\bar{Y}$ ,  $\underline{X}$  und  $\bar{X}$ .*

*Im Falle, dass die Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}(\omega)$  für jedes  $\omega \in \Omega$  gegen  $X(\omega) \in \mathbb{R}$  konvergiert, ist auch der Grenzwert  $X$  eine Zufallsvariable.*

**Beweis:** Falls  $\underline{Y}(\omega) \in \mathbb{R}$  für jedes  $\omega \in \Omega$  dann gilt für jedes  $b \in \mathbb{R}$  offensichtlich  $\underline{Y}^{-1}((-\infty, b)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{A}$ . Anwendung von Lemma 1.14 liefert unmittelbar die Messbarkeit von  $\underline{Y}$ . Die Beweise für  $\bar{Y}$ ,  $\underline{X}$  und  $\bar{X}$  verlaufen vollkommen analog.

Falls nun  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen  $X$  konvergiert und  $X$  nur endliche Werte annimmt, dann gilt offensichtlich  $X = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$ , woraus die Messbarkeit von  $X$  unmittelbar folgt. ■

**Bemerkung 5.2** Um sich von der (insbesondere bei Grenzübergängen relevanten) Endlichkeitsbedingung zu lösen werden in vielen Lehrbüchern oft direkt Zufallsvariable mit Werten

<sup>†</sup>Ohne Verwendung der in der Analysis nicht behandelten Stieltjes Integrale.

in  $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$  betrachtet, i.e. Zufallsvariable, die auch die Werte  $\{-\infty, \infty\}$  annehmen können. Es lässt sich unschwer nachweisen, dass  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ , definiert durch

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \{A \cup E : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), E \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$$

wieder eine  $\sigma$ -Algebra ist. Messbarkeit einer Abbildung  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  ist dann in gewohnter Weise definiert, i.e. für jedes  $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  muss  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  gelten. Wir werden in der Folge die Fälle  $\mathbb{R}$  und  $\overline{\mathbb{R}}$  nicht explizit unterschieden (da die Resultate, insbesondere Satz 5.1, auch für den größeren Messraum  $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  gelten) und der Einfachheit halber in beiden Fällen nur von 'Zufallsvariablen' sprechen.

Konsistenterweise wird meist auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  geschrieben falls für jedes  $M > 0$  ein Index  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  existiert, sodass  $x_n > M$  für alle  $n \geq n_0$  gilt.

**Definition 5.3** Eine Zufallsvariable  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  heisst einfach genau dann, wenn paarweise verschiedene Werte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0, \infty)$  und paarweise disjunkte Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  mit  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$  existieren, sodass

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \quad (5.2)$$

für alle  $\omega \in \Omega$  gilt. Die Familie aller einfachen Zufallsvariablen wird im Folgenden mit  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A})$  bezeichnet.

Einfache Zufallsvariable sind also insbesondere diskret und nicht-negativ.

**Bemerkung 5.4** Sie wissen schon aus der Vorlesung 'Stochastische Modellbildung', dass für Zufallsvariable in der Form (5.2) der Erwartungswert (wir schreiben  $\mathbb{E}X$  oder  $\mathbb{E}(X)$ ) definiert ist durch

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^n \alpha_i P^X(\{\alpha_i\}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(A_i) =: \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega). \quad (5.3)$$

Damit ist der im Folgenden beschriebene Zugang (der Rückführung auf den diskreten Fall) in keinsten Weise überraschend.

Das folgende einfache Resultat hat weitreichende Konsequenzen und ist der Schlüssel für die Verallgemeinerung des Erwartungswerts von diskreten auf beliebige Zufallsvariable:

**Satz 5.5** Sei  $X$  eine nicht-negative Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann existiert eine Folge  $X_1, X_2, X_3 \dots \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A})$  mit

(a)  $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X$  und

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$  für jedes  $\omega \in \Omega$ .

Mit anderen Worten: Jede nicht-negative Zufallsvariable ist der Grenzwert einer monoton wachsenden Folge von einfachen Zufallsvariablen.

**Beweis:** Für festes  $n \in \mathbb{N}$  seien die Mengen  $(A_{n,i})_{i=0}^{n2^n}$  definiert durch

$$A_{n,i} := \begin{cases} X^{-1}\left(\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)\right) & \text{für } i \in \{0, \dots, n2^n - 1\} \\ X^{-1}([n, \infty)) & \text{für } i = n2^n. \end{cases} \quad (5.4)$$

Die Messbarkeit von  $X$  impliziert  $A_{n,i} \in \mathcal{A}$  für jedes  $i \in \{0, \dots, n2^n\}$ . Setzen wir also

$$X_n(\omega) := \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbf{1}_{A_{n,i}}(\omega) + n \mathbf{1}_{A_{n,n2^n}}(\omega) \quad (5.5)$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , dann gilt offensichtlich  $X_n \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A})$ . Dass die Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Punkt (a) in Satz 5.5 erfüllt, kann leicht nachgeprüft werden. Zum Beweis von (b) betrachten wir ein beliebiges, aber festes  $\omega_0 \in \Omega$ . Wegen  $X(\omega_0) < \infty$  existiert ein Index  $n_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $X(\omega_0) < n$  und damit  $\omega_0 \in \bigcup_{i=0}^{2^n-1} A_{n,i}$  für jedes  $n \geq n_0$ . Auf jedem  $A_{n,i}$  mit  $i < n2^n$  gilt aber nach Konstruktion  $|X_n - X| \leq \frac{1}{2^n}$ , also insbesondere  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega_0) = X(\omega_0)$ . ■

Ausgehend von (5.3) und Satz 5.5 ist die folgende Definition naheliegend:

**Definition 5.6** Sei  $X$  eine nicht-negative Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann ist der Erwartungswert  $\mathbb{E}X$  von  $X$  definiert durch

$$\mathbb{E}X := \int_{\Omega} X dP := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) \quad (5.6)$$

wobei  $X_1, X_2, X_3, \dots$  eine (gemäß Satz 5.5 existierende) monoton wachsende Folge einfacher Zufallsvariable ist, die punktweise gegen  $X$  konvergiert.

**Bemerkung 5.7** A priori ist nicht klar, ob der Erwartungswert gemäß Definition 5.6 wohldefiniert ist, d.h. ob bei Wahl einer anderen monoton wachsenden Folge einfacher Zufallsvariable  $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ , die punktweise gegen  $X$  konvergiert, auch tatsächlich  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}X_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^*$  gilt. Diese Gleichheit kann aber unschwer bewiesen werden und wir können daher alternativ den Erwartungswert auch schreiben als

$$\mathbb{E}X = \sup \left\{ \mathbb{E}Z : Z \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A}) \text{ und } 0 \leq Z \leq X \right\}. \quad (5.7)$$

**Beispiel 5.8** Wir berechnen für  $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$  den Erwartungswert  $\mathbb{E}(X)$  über die in Satz 5.5 verwendete Approximation (5.5) und erhalten ( $P(A_{n,i}) = 0$  für  $i \geq 2^n$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} P(A_{n,i}) + nP(A_{n,n2^n}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{i}{2^n} P(A_{n,i}) \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{i}{2^n} P^X \left( \left[ \frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right) \right) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{i}{2^n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} i \\ &= \frac{1}{4^n} \frac{(2^n - 1)2^n}{2}. \end{aligned}$$

Damit folgt sofort das schon aus den vorigen Kapitel bekannte Resultat

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} \frac{(2^n - 1)2^n}{2} = \frac{1}{2}.$$

Weitere Beispiele folgen in den Übungen.

Als letzter Schritt erweitern wir die Definition des Erwartungswerts auf allgemeine Zufallsvariable. Jede Zufallsvariable  $X$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  kann als Differenz zweier nicht-negativer Zufallsvariable geschrieben werden - setzen wir (Skizze!)

$$X^+(\omega) := \max(X(\omega), 0) \quad \text{und} \quad X^-(\omega) := \max(-X(\omega), 0) = -\min(X(\omega), 0)$$

für jedes  $\omega \in \Omega$ , dann sind  $X^+, X^-$  nicht-negative Zufallsvariable und es gilt  $X = X^+ - X^-$  sowie  $|X| = X^+ + X^-$ . Damit macht folgende Definition Sinn:

**Definition 5.9** Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Ist  $\mathbb{E}(X^+) < \infty$  oder  $\mathbb{E}(X^-) < \infty$  dann ist der Erwartungswert  $\mathbb{E}X$  von  $X$  definiert durch

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\Omega} X dP = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-). \quad (5.8)$$

Wir nennen  $X$  integrierbar wenn  $\mathbb{E}(X^+), \mathbb{E}(X^-) < \infty$  (oder, äquivalent dazu, wenn  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ ).

**Bemerkung 5.10** Alle bisher betrachteten Zufallsvariable  $X$ , mit Ausnahme Cauchy-verteilter  $X$ , sind integrierbar. Weiters ist offensichtlich jede beschränkte Zufallsvariable  $X$  (i.e.  $|X| \leq M$  für ein  $M > 0$ ) integrierbar.

**Bemerkung 5.11** Für integrierbare  $X$  gilt wegen  $|\mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)| \leq \mathbb{E}(X^+) + \mathbb{E}(X^-)$  auch

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|) < \infty. \quad (5.9)$$

**Bemerkung 5.12** Es lässt sich unschwer zeigen, dass  $\mathbb{E}(X)$  konsistent definiert ist, i.e. für diskrete und absolut stetige Zufallsvariable ergeben sich die schon bekannten Ausdrücke (siehe Übungen). Weiters gilt im Falle einer absolut stetigen Zufallsvariable  $X$  mit Dichte  $f$  und einer (messbaren) Funktion  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  falls  $\mathbb{E}(\Phi(X)^+) < \infty$  oder  $\mathbb{E}(\Phi(X)^-) < \infty$  auch

$$\mathbb{E}(\Phi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) f(x) dx.$$

Selbige Aussage gilt auch für absolut stetige Zufallsvektoren, i.e. falls  $(X_1, \dots, X_m)$  absolut stetig mit Dichte  $f$  und  $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion mit  $\mathbb{E}(\Phi(X_1, \dots, X_m)^+) < \infty$  oder  $\mathbb{E}(\Phi(X_1, \dots, X_m)^-) < \infty$ , dann gilt auch

$$\mathbb{E}(\Phi(X_1, \dots, X_m)) = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x_1, \dots, x_m) f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m.$$

**Beispiel 5.13** Sei  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ . Die Zufallsvariable  $Y = X^2$  ist beschränkt und damit integrierbar. Wir berechnen  $\mathbb{E}(X^2)$ :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

Der Erwartungswert ist linear und monoton - es gilt das folgende Resultat (vergleiche mit dem diskreten Fall in der Vorlesung Stochastische Modellbildung):



**Satz 5.14** Seien  $X, Y$  integrierbare Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann ist auch  $aX + bY$  eine integrierbare Zufallsvariable und es gilt

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y). \quad (5.10)$$

Gilt weiters  $X \leq Y$  dann folgt  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ .

**Beweis: (Schritt 1):** Wir starten analog dem bisherigen Zugang und beweisen die Linearität zuerst für nicht-negative integrierbare Zufallsvariable  $X, Y$  und  $a, b \in [0, \infty)$ : Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge von einfachen Zufallsvariablen, die gegen  $X$  konvergiert. Dann ist offensichtlich  $(aX_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine nicht-fallende Folge von einfachen Zufallsvariablen, die gegen  $aX$  konvergiert. Da  $X$  nach Voraussetzung integrierbar ist und der Erwartungswert auf  $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A})$  monoton ist erhalten wir damit unmittelbar

$$\mathbb{E}(aX) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(aX_n) = a \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = a\mathbb{E}(X).$$

Um  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$  zu zeigen gehen wir vollkommen analog vor und betrachten wachsende Folgen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einfacher Zufallsvariable die gegen  $X$  bzw.  $Y$  konvergieren:

$$\mathbb{E}(X + Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n + Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

**(Schritt 2):** Als zweiten Schritt zeigen wir  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$  für integrierbare Zufallsvariable  $X, Y$ . Setzen wir  $Z := X + Y$ , dann ist  $Z$  integrierbar und es gilt  $Z^+ - Z^- = X^+ - X^- + Y^+ - Y^-$ . Schritt 1 impliziert also

$$\mathbb{E}(Z^+) + \mathbb{E}(X^-) + \mathbb{E}(Y^-) = \mathbb{E}(Z^-) + \mathbb{E}(X^+) + \mathbb{E}(Y^+)$$

woraus sich unmittelbar  $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$  ergibt.

**(Schritt 3):** Zu zeigen, dass  $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$  für integrierbares  $X$  und  $a \in \mathbb{R}$  gilt, ist eine einfache Übungsaufgabe.

**(Schritt 4):** Für nicht-negative Zufallsvariable  $X, Y$  mit  $X \leq Y$  folgt aus (5.7) sofort  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ . Gilt nun  $X \leq Y$  für integrierbare Zufallsvariable  $X, Y$ , dann folgt offensichtlich (Skizze!)  $X^+ \leq Y^+$  sowie  $X^- \geq Y^-$ , woraus sich mit dem Vorhergehenden unmittelbar

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-) \leq \mathbb{E}(Y^+) - \mathbb{E}(Y^-) = \mathbb{E}(Y)$$

ergibt. ■

Eine oft sehr nützliche, alternative Berechnungsmöglichkeit von  $\mathbb{E}(X)$ , insbesondere für den Fall nicht rein absolut stetiger oder rein diskreter Verteilungen, liefert das folgende Resultat:

**Satz 5.15** Sei  $X$  integrierbare Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Verteilungsfunktion  $F$ , dann gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{(0, \infty)} (1 - F(t)) dt - \int_{(-\infty, 0)} F(t) dt \quad (5.11)$$

**Beweis:** Übungsaufgabe

Erwartungswerte sind sehr flexibel gegenüber Grenzwertbildung - im Appendix finden Sie

drei standard Resultate, die vielseitig anwendbar sind und das 'Rechnen' mit Erwartungswerten signifikant erleichtern.

In der Vorlesung Stochastische Modellbildung haben Sie schon die Varianz diskreter Zufallsvariable betrachtet, in Definition 3.8 die Varianz für den absolut stetigen Fall. Mit Hilfe des soeben eingeführten allgemeinen Begriffs des Erwartungswerts definieren wir nun:

**Definition 5.16** Sei  $X$  eine integrierbare Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann ist die Varianz  $\mathbb{V}(X)$  von  $X$  definiert durch

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \quad (5.12)$$

Die Größe  $\sigma := \sqrt{\mathbb{V}(X)}$  heisst Standardabweichung von  $X$ .

Nachdem  $\mathbb{V}(X)$  als Erwartungswert der Zufallsvariable  $(X - \mathbb{E}(X))^2$  definiert ist, folgt mit Hilfe von Bemerkung 5.12, dass sich für diskrete oder absolut stetige Zufallsvariable wieder die schon bekannten Ausdrücke ergeben. Die Varianz kann auch für integrierbare Zufallsvariable  $+\infty$  sein. Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts gilt für integrierbares  $X$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X)) + (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2, \quad (5.13)$$

sowie

$$\mathbb{V}(aX + b) = \mathbb{E}(aX + b - a\mathbb{E}(X) - b)^2 = a^2\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = a^2\mathbb{V}(X). \quad (5.14)$$

Die Varianz ist ein Maß für die Variabilität - gilt zum Beispiel  $\mathbb{V}(X) = 0$ , dann folgt die Existenz einer Menge  $A \in \mathcal{A}$  mit  $P(A) = 1$ , auf der  $X$  konstant ist (Übungsaufgabe).

**Beispiel 5.17** Wir berechnen  $\mathbb{V}(X)$  für  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ . Wegen  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$  genau dann wenn  $Z := \frac{X-a}{b-a} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ , betrachten wir zuerst  $Z$  und erhalten

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Wegen  $X = a + (b - a)Z$  ergibt sich unter Verwendung von (5.14) sofort  $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ .

**Definition 5.18** Eine Zufallsvariable  $X$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  heisst quadratisch integrierbar genau dann wenn  $\mathbb{E}(X^2) < \infty$  (i.e. wenn  $X^2$  integrierbar ist).

Jede quadratisch integrierbare Zufallsvariable ist auch integrierbar und es gilt (siehe Übungen)

$$\mathbb{E}(|X|) \leq (\mathbb{E}(X^2))^{1/2}. \quad (5.15)$$

Allgemein gilt die Hölder'sche Ungleichung:

**Satz 5.19** Seien  $X, Y$  Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $p, q \in (1, \infty)$  konjugiert (i.e.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ), dann gilt

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq (\mathbb{E}(|X|^p))^{1/p} (\mathbb{E}(|Y|^q))^{1/q}. \quad (5.16)$$

Im Falle, dass die rechte Seite von (5.16) endlich ist gilt Gleichheit genau dann, wenn Konstanten  $\alpha, \beta \geq 0$  (nicht beide gleich 0) und eine Menge  $A \in \mathcal{A}$  mit  $P(A) = 1$  existieren, sodass  $\alpha|X|^p(\omega) = \beta|Y|^q(\omega)$  für jedes  $\omega \in A$  gilt.

**Beweis:** erfolgt in wesentlich allgemeinerer Form in der Maßtheorie.

Der Erwartungswert minimiert den quadratischen Abstand - es gilt folgendes einfache Resultat:

**Satz 5.20 (Steiner'scher Verschiebungssatz)** *Sei  $X$  eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , dann gilt:*

$$\mathbb{E}(X - a)^2 = \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}X - a)^2$$

*Insbesondere ist also  $\mathbb{E}(X - a)^2$  genau dann minimal wenn  $a = \mathbb{E}(X)$ .*

**Beweis:** Unter Verwendung der Linearität des Erwartungswerts ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X - a)^2 &= \mathbb{E}(X - a + \mathbb{E}X - \mathbb{E}X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}(a - \mathbb{E}X)^2 + 2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(\mathbb{E}X - a)) \\ &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}(a - \mathbb{E}X)^2 + 2(\mathbb{E}X - a) \underbrace{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)}_{=0} \\ &= \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}X - a)^2. \end{aligned}$$

Die behauptete Minimierungseigenschaft von  $\mathbb{E}(X)$  folgt nun unmittelbar. ■

Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Stichprobe der Zufallsvariable  $X$ . Dann sind Stichprobenmittel  $\bar{x}_n$  und Stichprobenvarianz  $s_n^2$  definiert durch

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2. \quad (5.17)$$

Den Grund dafür, in der Definition von  $s_n^2$  durch  $n-1$  und nicht durch  $n$  zu dividieren werden wir später noch genauer diskutieren - alternativ kann dem aber auch schon jetzt mit Hilfe von Simulationen (siehe Übungsaufgaben) vorgegriffen werden.

**Frage 5.21** Beachten Sie, dass die Ausdrücke in (5.17) genau  $\mathbb{E}(Z)$  und  $\frac{n-1}{n}\mathbb{V}(Z)$  einer speziellen diskreten Zufallsvariable  $Z$  entsprechen - welche Zufallsvariable ist dies?

Die Varianz einer Zufallsvariable kann auch zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon$  ist, verwendet werden:

**Satz 5.22 (Tschebyscheff und Markov Ungleichung)** *Sei  $X$  eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$*

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}. \quad (5.18)$$

*Allgemeiner gilt für jede Zufallsvariable  $Y$ , jede (nicht notwendigerweise streng) monoton wachsende Abbildung  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  und jedes  $\varepsilon > 0$  mit  $\varphi(\varepsilon) > 0$*

$$P(|Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(\varphi \circ |Y|)}{\varphi(\varepsilon)}. \quad (5.19)$$

**Beweis:** Wir beweisen zuerst die allgemeinere zweite Aussage und setzen  $Z := |Y|$ . Für jedes  $\omega \in \Omega$  gilt offensichtlich

$$\varphi(Z(\omega)) \geq \varphi(Z(\omega)) \mathbf{1}_{[\varphi(\varepsilon), \infty)}(\varphi(Z(\omega))) \geq \varphi(\varepsilon) \mathbf{1}_{[\varepsilon, \infty)}(Z(\omega)) = \varphi(\varepsilon) \mathbf{1}_{Z^{-1}([\varepsilon, \infty))}(\omega).$$

Unter Verwendung der Monotonie und Linearität des Erwartungswerts ergibt sich damit sofort die gewünschte Markov Ungleichung

$$\mathbb{E}(\varphi \circ Z) \geq \varphi(\varepsilon) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Z^{-1}([\varepsilon, \infty))}) = \varphi(\varepsilon) P(Z \geq \varepsilon).$$

Um die Tschebyscheff Ungleichung zu beweisen, setzen wir einfach  $\varphi(t) = t^2$  und betrachten die Zufallsvariable  $Y = X - \mathbb{E}X$ . ■

Seien  $X, Y$  quadratisch integrierbare Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X + Y) &= \mathbb{E}(X + Y - \mathbb{E}(X + Y))^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X + Y - \mathbb{E}Y)^2 \\ &= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)). \end{aligned}$$

**Definition 5.23** Seien  $X, Y$  quadratisch integrierbare Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann ist die Kovarianz von  $(X, Y)$  definiert durch

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y))$$

Im Falle von  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  nennen wir  $X, Y$  unkorreliert. Gilt weiters  $\mathbb{V}(X), \mathbb{V}(Y) > 0$  dann heisst

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$$

Korrelationskoeffizient von  $(X, Y)$ .

**Definition 5.24** Wir sagen im Folgenden, eine Aussage/Eigenschaft gilt  $P$ -fast sicher (und schreiben  $[P]$ ), genau dann wenn eine Menge  $A \in \mathcal{A}$  mit  $P(A) = 1$  existiert, sodass die Aussage/Eigenschaft für jedes  $\omega \in A$  gilt.

**Beispiel 5.25** Wie in den Übungen gezeigt gilt für jede quadratisch integrierbare Zufallsvariable  $X$ , dass  $\mathbb{V}(X) = 0$  genau dann wenn eine Konstante  $a \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $X = a$   $[P]$ .

$\rho(X, Y)$  misst die lineare Abhängigkeit der Zufallsvariablen  $X, Y$ . Der folgende Satz fasst die wichtigsten Eigenschaften von Kovarianz und Korrelationskoeffizienten zusammen:

**Satz 5.26** Seien  $X, Y$  quadratisch integrierbare Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , dann gilt:

1.  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ .
2. Im Falle  $\mathbb{V}(X), \mathbb{V}(Y) > 0$  gilt  $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$ .
3. Falls  $\rho(X, Y) = 1$  dann existiert eine Konstante  $a > 0$  sodass

$$Y - \mathbb{E}(Y) = a(X - \mathbb{E}(X)) \quad [P].$$

4. Falls  $\rho(X, Y) = -1$  dann existiert eine Konstante  $a < 0$  sodass

$$Y - \mathbb{E}(Y) = a(X - \mathbb{E}(X)) \quad [P].$$

5. Für  $a, c > 0$  und  $b, d \in \mathbb{R}$  gilt  $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$ .

**Beweis:** Der erste Punkt ist klar (Linearität des Erwartungswerts).

Der zweite Punkte ist eine direkte Folgerung aus der Hölderschen Ungleichung für den Fall  $p = q = 2$ . Zum Beweis des dritten Punkts kann wie folgt vorgegangen werden: Wegen  $\mathbb{V}(X), \mathbb{V}(Y) > 0$  sind die Zufallsvariablen  $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$  und  $Y^* = \frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(Y)}}$  wohldefiniert und es folgt (Linearität des Erwartungswerts)

$$0 \leq \mathbb{E}(X^* - Y^*)^2 = \mathbb{V}(X^* - Y^*) = \underbrace{\mathbb{V}(X^*)}_{=1} + \underbrace{\mathbb{V}(Y^*)}_{=1} - 2 \underbrace{\text{Cov}(X^*, Y^*)}_{=\rho(X, Y)}.$$

Gilt nun  $\rho(X, Y) = 1$  dann folgt sofort  $0 \leq \mathbb{E}(X^* - Y^*)^2 = 1 + 1 - 2 = 0$ , also  $X^* - Y^* = 0 \quad [P]$  und damit wie behauptet  $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}} = \frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(Y)}} \quad [P]$ .

Der Fall  $\rho = -1$  kann analog behandelt werden. Der letzte Punkt ist eine unmittelbare Folgerung aus der Linearität des Erwartungswerts und Gleichung (5.14). ■

Gegeben sei eine Strichprobe  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  von  $(X, Y)$ . Dann ist der *empirische Korrelationskoeffizient*  $\rho_n$  definiert durch

$$\rho_n = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2}}. \quad (5.20)$$

Beachten Sie, dass dies genau dem Korrelationskoeffizienten des diskret gleichverteilten Zufallsvektors  $(X, Y)$  auf  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  entspricht.

Für unkorrelierte, quadratisch integrierbare Zufallsvariable  $X_1, \dots, X_n$  ist die Varianz additiv - es gilt folgendes Resultat:

**Satz 5.27** Seien  $X_1, \dots, X_n$  quadratisch integrierbare Zufallsvariable und  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . Setzen wir  $\sigma_{ij} := \text{Cov}(X_i, X_j)$  für jedes Paar  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ , dann ist die Matrix  $\sigma = (\sigma_{ij})$  positiv semidefinit.

Falls  $\sigma_{ij} = 0$  für  $i \neq j$ , dann gilt die folgende Gleichheit:

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{V}(X_i)$$

Mit anderen Worten: Wenn  $X_1, \dots, X_n$  paarweise unkorreliert sind, dann ist die Varianz additiv

**Beweis:** Die Linearität des Erwartungswerts impliziert

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i - \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(X_i)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i (X_i - \mathbb{E}(X_i))\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^n a_i a_j (X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))\right) = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \sigma_{ij} \end{aligned}$$

woraus sich beide Behauptungen unmittelbar ergeben. ■

Mit Hilfe der bisher behandelten Werkzeuge können wir schon die folgende Version des *schwachen Gesetzes der Großen Zahlen* beweisen:

**Satz 5.28 (WLLN)** Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge quadratisch integrierbarer, paarweise unkorrelierter Zufallsvariable mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = 0.$$

Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \quad (5.21)$$

**Folgerung 5.29** Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge quadratisch integrierbarer, paarweise unkorrelierter, identisch verteilter Zufallsvariable. Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}(X)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

**Beweis von Satz 5.28:** Wir definieren eine neue Zufallsvariable  $Y_n$  durch

$$Y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i)).$$

Dann gilt  $\mathbb{E}(Y_n) = 0$  und es folgt mit Satz 5.27

$$\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i).$$

Damit liefert die Tschebysheff'sche Ungleichung für  $\varepsilon > 0$  sofort

$$P(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 5.30** Wir berechnen Kovarianz und Korrelationskoeffizient eines absolut stetigen Vektors  $X = (X_1, X_2)$  mit Dichte (stetige Gleichverteilung auf  $[0, 1]^2$ )

$$f(x, y) = \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x, y).$$

Sei  $x, y \in [0, 1]$ . Aus Beispiel 3.5 (setze  $\theta = 0$ ) wissen wir schon gilt  $X_1, X_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$ . Insbesondere ergibt sich also  $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2}$  sowie  $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2) = \frac{1}{12}$ . Für  $Cov(X_1, X_2)$  erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(X_2) = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \frac{1}{4} \\ &= \int_{[0,1]^2} x_1 x_2 dx_1 dx_2 - \frac{1}{4} = 0. \end{aligned}$$

$X_1$  und  $X_2$  sind also unkorreliert und wir erhalten  $\rho(X_1, X_2) = 0$ .

Wie vorhin bemerkt, misst der Korrelationskoeffizient nur lineare Abhängigkeit - er kann aber nicht als generelles (Un)Abhängigkeitsmaß verwendet werden. Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem Beispiel, das genau diese Tatsache veranschaulicht.

**Beispiel 5.31** Wir betrachten  $a \in [0, 1]$  und die Funktion  $T_a$  definiert durch

$$T_a(x) = \begin{cases} a - x & \text{für } x \leq a, \\ x & \text{für } x > a. \end{cases}$$

Weiters sei  $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$  und  $Y = T_a \circ X$ , i.e.  $Y$  ist eine deterministische Funktion von  $X$  (genaues Gegenteil von Unabhängigkeit - wenn  $X$  bekannt dann auch  $Y$ ). Es lässt sich leicht nachrechnen, dass  $T_a \circ X \sim \mathcal{U}(0, 1)$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(X(T_a \circ X)) = \int_{\mathbb{R}} xT_a(x)f(x)dx = \int_{[0,1]} xT_a(x)dx \\ &= \int_{[0,a]} x(a-x)dx + \int_{[a,1]} x^2dx = \frac{1}{3} - \frac{a^3}{6}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also  $Cov(X, Y) = \frac{1}{3} - \frac{a^3}{6} - \frac{1}{4}$ . Für den Fall  $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  sind die Zufallsvariablen  $X, Y$  (trotz der extremen Abhängigkeit) sogar unkorreliert.

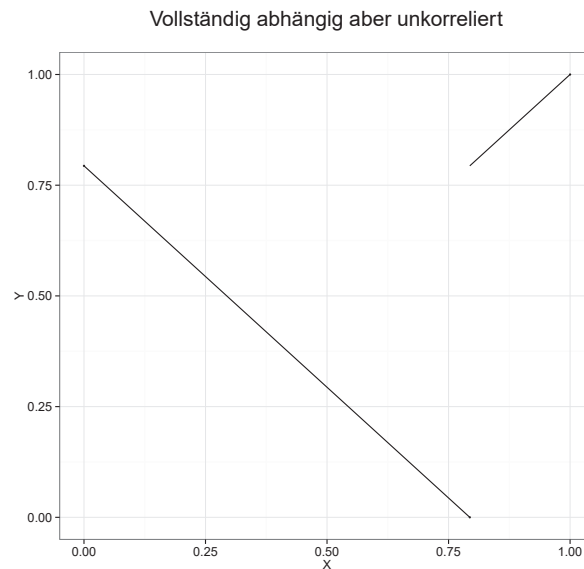


Abbildung 5.1: Transformation  $T_a$  von Beispiel 5.31 für  $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ .

# Kapitel 6

## Unabhängigkeit

### 6.1 Unabhängige Mengensysteme und Zufallsvariable

Sie haben in der Vorlesung 'Stochastische Modellbildung' schon den Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen kennengelernt: Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A, B \in \mathcal{A}$ . Dann sind  $A$  und  $B$  unabhängig (per definitionem) genau dann, wenn

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Im Falle von  $P(B) > 0$  bedeutet dies

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A),$$

das Eintreten von  $B$  ändert also nicht die Eintrittswahrscheinlichkeit von  $A$ .

Allgemein heißt eine Familie  $(A_i)_{i \in I}$  ( $I$  beliebige Indexmenge) mit  $A_i \in \mathcal{A}$  für jedes  $i \in I$  *unabhängig* genau dann wenn für jede endliche (nichtleere) Teilmenge  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$  die folgende Gleichheit gilt:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^n P(A_{i_k}) \quad (6.1)$$

Wie das folgende einfache Beispiel zeigt, folgt aus der paarweisen Unabhängigkeit von Mengen  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  im Allgemeinen nicht die Unabhängigkeit der Familie  $(A_i)_{i=1}^n$ :

**Beispiel 6.1** Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit

$$\Omega := \{1, 2, \dots, 6\}^2, \quad \mathcal{A} := \mathfrak{p}(\Omega), \quad P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36} \text{ für jedes Paar } (i, j) \in \Omega$$

als Modell für zweimaliges Würfeln mit einem fairen Würfel und die folgenden drei Ereignisse:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(i, j) \in \Omega : i \text{ ungerade}\}, & A_2 &= \{(i, j) \in \Omega : j \text{ ungerade}\}, \\ A_3 &= \{(i, j) \in \Omega : i + j \text{ ungerade}\} \end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich  $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$  sowie  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$ , die Familie  $(A_i)_{i=1}^3$  ist also paarweise unabhängig. Wegen  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$  und  $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8} > 0$  ist sie aber nicht unabhängig.



Wir erweitern nun den Begriff der Unabhängigkeit in naheliegender Weise auf Mengensysteme:

**Definition 6.2** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{A}$  ein System von Mengen in  $\mathcal{A}$  für jedes  $i \in I$ . Dann heißt die Familie  $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$  unabhängig genau dann wenn für jede nichtleere endliche Teilmenge  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$  und beliebige Mengen  $E_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, E_{i_2} \in \mathcal{E}_{i_2}, \dots, E_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$  die Gleichheit

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n E_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^n P(E_{i_k}) \quad (6.2)$$

gilt.

Beachten Sie, dass diese Definition für den Fall  $\mathcal{E}_i = \{A_i\}$  für alle  $i \in I$  genau der vorhin erwähnten Definition für Familien  $(A_i)_{i \in I}$  entspricht.

Aus der Unabhängigkeit von  $A, B \in \mathcal{A}$  folgt sofort die Unabhängigkeit von  $A^c, B^c$  (und umgekehrt) - es gilt nämlich

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A^c)P(B^c). \end{aligned}$$

Unabhängigkeit von  $A^c, B$  sowie Unabhängigkeit von  $A, B^c$  lässt sich analog nachrechnen. Insbesondere impliziert also die Unabhängigkeit von  $A$  und  $B$  auch die Unabhängigkeit der erzeugten  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{A}_\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$  und  $\mathcal{A}_\sigma(\{B\}) = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$  gemäß Definition 6.2. Damit ist das folgende wichtige Resultat nicht ganz überraschend (stellen Sie sich der Einfachheit halber den Fall  $I = \mathbb{N}$  oder  $I$  endlich vor):

**Satz 6.3** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $I$  eine beliebige Indexmenge, jedes  $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{A}$  durchschnittsstabil, und die Familie  $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$  unabhängig. Dann ist auch die Familie  $(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_i))_{i \in I}$  unabhängig.

**Beweis:** Mit Methoden der Maßtheorie.

Das folgende Resultat wird sich im Zusammenhang mit der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen als sehr nützlich erweisen (stellen Sie sich der Einfachheit halber  $I = \mathbb{N}$  oder  $I$  endlich vor):

**Satz 6.4 (Zusammenfassen unabhängiger  $\sigma$ -Algebren)** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $I$  eine beliebige Indexmenge, jedes  $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{A}$  durchschnittsstabil, und die Familie  $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$  unabhängig. Weiters sei  $(I_j)_{j \in J}$  eine Zerlegung von  $I$  in paarweise disjunkte Mengen  $I_j$  und für jedes  $j \in J$  definiert durch

$$\mathcal{A}_j := \mathcal{A}_\sigma\left(\bigcup_{i \in I_j} \mathcal{E}_i\right).$$

Dann ist auch die Familie  $(\mathcal{A}_j)_{j \in J}$  unabhängig.

**Beweis:** Für jedes  $j \in J$  setzen wir

$$\tilde{\mathcal{E}}_j := \left\{ \bigcap_{i \in K} A_i : K \subseteq I_j \text{ endlich und } A_i \in \mathcal{E}_i \forall i \in K \right\}.$$

Dann ist  $\tilde{\mathcal{E}}_j$  durchschnittsstabil und wegen  $\bigcup_{i \in I_j} \mathcal{E}_i \subseteq \tilde{\mathcal{E}}_j \subseteq \mathcal{A}_j$  folgt

$$\mathcal{A}_j := \mathcal{A}_\sigma \left( \bigcup_{i \in I_j} \mathcal{E}_i \right) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\tilde{\mathcal{E}}_j) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_j) = \mathcal{A}_j$$

und damit  $\mathcal{A}_\sigma(\tilde{\mathcal{E}}_j) = \mathcal{A}_j$ . Nach Konstruktion ist die Familie  $(\tilde{\mathcal{E}}_j)_{j \in J}$  unabhängig, Anwendung von Satz 6.3 liefert das gewünschte Resultat. ■

Wir erweitern nun den Begriff der Unabhängigkeit auf Zufallsvariable. Naheliegenderweise nennen wir (als ersten Schritt) Zufallsvariable  $X_1, \dots, X_n$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  unabhängig, wenn für beliebige Borel Mengen  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  die folgende Gleichheit gilt

$$P \left( \bigcap_{k=1}^n \underbrace{X_k^{-1}(B_k)}_{=: A_k \in \mathcal{A}} \right) = \prod_{k=1}^n P \left( \underbrace{X_k^{-1}(B_k)}_{=: A_k \in \mathcal{A}} \right), \quad (6.3)$$

i.e. wenn also die entsprechenden vollständigen Urbilder  $A_i$  unabhängig sind. Beachten Sie, dass wir obige Gleichung mit  $X := (X_1, \dots, X_n)$  auch wie folgt schreiben können:

$$P^X \left( \bigotimes_{i=1}^n B_i \right) = \prod_{k=1}^n P^{X_k}(B_k)$$

Vom Beweis von Satz 2.2 (Gleichung 2.3) wissen wir das folgende: Ist  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  dann ist auch  $\mathcal{A}_\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$  eine  $\sigma$ -Algebra und es gilt  $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{A}$ . Wir nennen  $\mathcal{A}_\sigma(X)$  im Folgenden auch *die von  $X$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra* und machen folgende Definition.

**Definition 6.5** Eine Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  heißt unabhängig genau dann, wenn die Familie  $(\mathcal{A}_\sigma(X_i))_{i \in I}$  der erzeugten  $\sigma$ -Algebren unabhängig ist.

Um Unabhängigkeit von  $(X_i)_{i \in I}$  zu zeigen reicht es aus, Gleichung (6.3) für Mengen aus durchschnittsstabilen Erzeugern zu überprüfen - durchschnittsstabile Erzeuger von  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  haben wir schon in Lemma 1.14 kennengelernt (welche der 12 Erzeuger sind wirklich durchschnittsstabil?).

**Satz 6.6** Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $\mathcal{E}$  ein durchschnittsstabiler Erzeuger von  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Dann ist die Familie  $(X_i)_{i=1}^n$  unabhängig genau dann wenn

$$P \left( \bigcap_{k=1}^n X_k^{-1}(B_k) \right) = \prod_{k=1}^n P(X_k^{-1}(B_k)) \quad (6.4)$$

für jede Auswahl von Mengen  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$  gilt.

**Beweis:** Gemäß Gleichung (2.3) gilt  $\mathcal{A}_\sigma(X^{-1}(\mathcal{E})) = X^{-1}(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}))$  für jede Zufallsvariable  $X$ . Ist also  $\mathcal{E}$  durchschnittsstabiler Erzeuger von  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  dann ist  $X^{-1}(\mathcal{E})$  durchschnittsstabiler Erzeuger von  $\mathcal{A}_\sigma(X)$ . Setzen wir  $\mathcal{A}_i := \mathcal{A}_\sigma(X_i)$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  dann ist also  $\mathcal{E}_i = X_i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$  durchschnittsstabiler Erzeuger von  $\mathcal{A}_i$ . Anwendung von Satz 6.3 liefert die gewünschte Behauptung. ■

**Folgerung 6.7** Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $X = (X_1, \dots, X_n)$ . Dann gilt:  $(X_i)_{i=1}^n$  ist unabhängig genau dann wenn die gemeinsame Verteilungsfunktion das Produkt der einzelnen Verteilungsfunktionen ist, i.e. wenn für alle  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  gilt:

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_{X_k}(x_k) \tag{6.5}$$

**Beweis:** Wir betrachten  $\mathcal{E} := \mathcal{E}_4 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$ . Dann ist  $\mathcal{E}$  offensichtlich ein durchschnittsstabiler Erzeuger von  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  und das Resultat folgt sofort aus Satz 6.6. ■

**Beispiel 6.8** Unabhängigkeit kann auch in etwas überraschenden Situationen auftreten. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ . Aus der Analysis wissen Sie, dass alle bis auf abzählbar viele  $w \in [0, 1)$  eine eindeutige Dezimaldarstellung

$$\omega = 0.x_1x_2x_3\dots$$

haben - für die abzählbar vielen Ausnahmen wählen wir jene Darstellung ohne Periode 9. Mit dieser Zuordnung bezeichne  $X_i(\omega) \in \{0, \dots, 9\}$  die  $i$ -te Stelle der Dezimalentwicklung. Es gilt dann für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und  $j \in \{0, \dots, 9\}$

$$X_n^{-1}(\{j\}) = \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}=0}^9 \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{i_k}{10^k} + \frac{j}{10^n}, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{i_k}{10^k} + \frac{j+1}{10^n} \right).$$

Insbesondere ist also jedes  $X_i$  Zufallsvariable und es lässt sich zeigen, dass  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  unabhängig ist (Übungsaufgabe).

Für den absolut stetigen Fall ist auch eine einfache Charakterisierung der Abhängigkeit direkt über die Wahrscheinlichkeitsdichten möglich - wir beginnen mit folgender Beobachtung: Angenommen  $X = (X_1, \dots, X_n)$  ist absolut stetig mit Dichte  $f$ . Sei  $B_1$  eine Borel Menge, dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} P^{X_1}(B_1) &= P^X(B_1 \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) = \int_{B_1 \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{B_1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n}_{:=f_1(x_1)} dx_1, \end{aligned}$$

die Zufallsvariable  $X_1$  ist also auch absolut stetig mit (Rand-) Dichte  $f_1$ . Für  $X_2, \dots, X_n$  kann analog vorgegangen werden um zu zeigen, dass jedes  $X_i$  ebenfalls absolut stetig mit Dichte  $f_i$  ist. Damit lässt sich folgendes Resultat zeigen:

**Satz 6.9** Sei  $X = (X_1, \dots, X_n)$  absolut stetig mit Dichte  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  und bezeichne  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  die (Rand-) Dichte von  $X_i$ . Dann gilt:  $(X_i)_{i=1}^n$  ist unabhängig genau dann wenn die gemeinsame Dichte das Produkt der Randdichten ist, i.e. wenn für ein  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\lambda_n(A) = 0$  und alle  $(x_1, \dots, x_n) \in A^c$  gilt:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f_k(x_k) \quad (6.6)$$

**Beweis:** Für einen sauberen Beweis benötigten wir einige zusätzliche Tatsachen aus der Maßtheorie. Wichtig ist aber zumindest zu verstehen, warum die Gleichheit nicht überall bestehen muss/kann - was passiert wenn eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$  in genau endlich vielen Punkte (oder in einer  $\lambda$ -Nullmenge) ändern - ändert das auch das Wahrscheinlichkeitsmaß und die Verteilung der Zufallsvariable ?

**Bemerkung 6.10** Für die Praxis wichtig ist folgende Situation: Sei  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist  $f$ , definiert durch

$$f(x_1, \dots, x_n) := \prod_{k=1}^n f_k(x_k)$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf  $\mathbb{R}^n$  und für  $X = (X_1, \dots, X_n) \sim \mu_f$  ist  $(X_i)_{i=1}^n$  unabhängig.

**Beispiel 6.11** Wir betrachten die in Beispiel 5.30 erwähnte Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$ , definiert durch

$$f(x, y) = \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x, y)$$

und  $(X, Y) \sim \mu_f$ . Wie in Beispiel 5.30 gezeigt gilt  $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$  und  $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$ . Die Randdichten  $f_1, f_2$  sind also gegeben durch  $f_1(x) = f_2(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$  und wir erhalten  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . Die Zufallsvariable  $X$  und  $Y$  sind also unabhängig.

Nachdem unabhängige  $\sigma$ -Algebren ohne Verlust der Unabhängigkeit zusammengefasst werden können (siehe Satz 6.4) und Unabhängigkeit von Zufallsvariablen über die Unabhängigkeit der erzeugten  $\sigma$ -Algebren definiert ist, ist folgendes Resultat wenig überraschend (stellen Sie sich der Einfachheit halber wieder den Fall  $I = \mathbb{N}$  oder  $I$  endlich vor):

**Satz 6.12** Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $(X_i)_{i \in I}$  eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Weiters sei  $(I_j)_{j \in J}$  eine Zerlegung von  $I$  in paarweise disjunkte Mengen  $I_j := \{i_1^j, i_2^j, \dots, i_{m_j}^j\}$  und  $g_j : \mathbb{R}^{m_j} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel messbar. Dann ist auch die Familie  $(g_j(X_{i_1^j}, X_{i_2^j}, \dots, X_{i_{m_j}^j}))_{j \in J}$  unabhängig.

**Beweisskizze:** Anwenden von Satz 6.4.

**Beispiel 6.13** Seien  $X_1, X_2, X_3$  unabhängige Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann sind beispielsweise auch  $Y := X_1 + X_2$  und  $Z := X_3^2$  unabhängig. Selbiges gilt für  $Y = g_1(X_1, X_3)$  und  $Z = g_2(X_2)$  falls  $g_1, g_2$  Borel messbar (also insbesondere für stetige  $g_1, g_2$ ).

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem folgenden wichtigen Resultat:

**Satz 6.14** Seien  $X, Y$  unabhängige, integrierbare Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y), \quad (6.7)$$

also insbesondere  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

Allgemeiner gilt für unabhängige, integrierbare Zufallsvariable  $(X_i)_{i=1}^n$  die Gleichheit

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i). \quad (6.8)$$

**Beweis:** In gewohnter Manier: zuerst für einfache Zufallsvariablen, dann erweitern auf den allgemeinen Fall (Übungsaufgabe).

## 6.2 Faltung von Zufallsvariablen

Wir betrachten in diesem kurzen Abschnitt, wie sich die Verteilung von  $X + Y$  berechnen lässt wenn  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, und starten mit einem einfachen Beispiel:

**Beispiel 6.15** Sei  $X \sim \text{Pois}(\lambda), Y \sim \text{Pois}(\mu)$  und  $X$  und  $Y$  unabhängig. Dann gilt offensichtlich für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} P(X + Y = n, X = k) = \sum_{k=0}^n P(Y = n - k, X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(Y = n - k) P(X = k) = \sum_{k=0}^n \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-(\mu+\lambda)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mu^{n-k} \lambda^k = \frac{1}{n!} (\mu + \lambda)^n e^{-(\lambda+\mu)}. \end{aligned}$$

Die Zufallsvariable  $X + Y$  ist also wieder Poisson-verteilt und zwar mit Parameter  $\lambda + \mu$ .

Zum Beweis des folgenden Resultats kann vollkommen analog vorgegangen werden.

**Satz 6.16** Seien  $X, Y$  unabhängige Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Werten in  $\mathbb{Z}$ . Setzen wir  $p_n := P(X = n) = P^X(\{n\})$ ,  $q_n = P(Y = n) = P^Y(\{n\})$  und  $r_n = P(X + Y = n) = P^{X+Y}(\{n\})$  für jedes  $n \in \mathbb{Z}$ , dann gilt:

$$r_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k q_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{n-k} q_k \quad (6.9)$$

**Beispiel 6.17** Für  $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bin}(1, p)$  und unabhängig lässt sich unschwer nachrechnen, dass  $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p)$  gilt (einfache Übungsaufgabe). Im einfachsten Fall  $n = 2$  erhalten wir zum Beispiel

$$r_0 = p_0 q_0 = (1-p)^2, \quad r_1 = \sum_{k=0}^1 p_k q_{1-k} = 2p(1-p), \quad r_2 = p_1 q_1 = p^2.$$

Wir wechseln nun zum absolut stetigen Fall:

**Satz 6.18** Seien  $X, Y$  absolut stetige, unabhängige Zufallsvariable mit Dichten  $f$  bzw.  $g$ . Dann ist auch  $X + Y$  absolut stetig mit Dichte  $f * g$ , wobei

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x) dx. \quad (6.10)$$

Wir nennen im Folgenden  $f * g$  auch die Faltung von  $f$  und  $g$ .

**Beweis:** Nachdem  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, erfüllt die Dichte  $h$  von  $(X, Y)$  die Gleichung  $h(x, y) = f(x)g(y)$ . Weiters gilt offensichtlich für jedes  $t \in \mathbb{R}$  unter Verwendung von  $T(x, y) := x + y$

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= P(X + Y \leq t) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(-\infty, t]}(T(X, Y))) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(x + y)h(x, y)dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{(-\infty, t-x]} g(y)dy dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{(-\infty, t]} g(y-x)dy dx = \\ &= \int_{(-\infty, t]} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)dx dy, \end{aligned}$$

woraus das gewünschte Resultat unmittelbar folgt. ■

**Beispiel 6.19** Seien  $X, Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$  und unabhängig. Für die Dichte von  $X + Y$  ergibt sich

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x) dx = \int_{[0,1]} \mathbf{1}_{[0,1]}(t-x) dx,$$

und damit

$$(f * g)(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \in [0, 1] \\ 2 - t & \text{für } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Wir beschliessen den Abschnitt mit einem wichtigen Resultat betreffend die Faltung von Normalverteilungen (weitere Beispiele werden in den Übungen betrachtet):

**Satz 6.20** Sei  $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ ,  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  und  $X, Y$  unabhängig. Dann ist auch  $X + Y$  normalverteilt und es gilt  $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$ .

**Beweis:** Übungsaufgabe.

**Folgerung 6.21** Seien  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  und unabhängig. Dann gilt:

1.  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
2.  $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

**Beweis:** Direkte Folgerung aus Satz 6.20 und den Rechenregel für Erwartungswert und Varianz.

**Bemerkung 6.22** Für  $P^X = \mu, P^Y = \nu$  und  $X, Y$  unabhängig, nennt man die Verteilung von  $X + Y$  Faltung von  $\mu$  und  $\nu$  und schreibt  $P^{X+Y} = \mu * \nu$ .

## Kapitel 7

# Starkes Gesetz der Großen Zahlen & Fundamentalsatz der Statistik

Wir beginnen mit der folgenden, auf Etemadi (1981) zurückgehenden, sehr allgemeinen Form des Starken Gesetzes der Großen Zahlen (Strong Law of Large Numbers) - beachten Sie insbesondere, dass nur paarweise Unabhängigkeit vorausgesetzt wird (zum Vergleich siehe das WLLN - Satz 5.28).

**Satz 7.1 (SLLN, Etemadi, 1981)** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge identisch verteilter, paarweise unabhängiger, integrierbarer Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbb{E}(X_1) \quad [P]. \quad (7.1)$$

**Beweis:** Siehe [2, 5].

Die Stärke des SLLN soll nun dreifach unterstrichen werden - wir beginnen mit Monte-Carlo Integration, beweisen dann den Fundamentalsatz der Statistik und beschließen das Kapitel mit einem sehr eleganten Beweis der (absoluten) Normalität reeller Zahlen (interessantes Resultat aus der Zahlentheorie). Um die Notation zu erleichtern verwenden wir folgende Definition:

**Definition 7.2** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Wir schreiben  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i.i.d. (*independent and identically distributed*) genau dann wenn  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängig ist und alle  $X_i$  dieselbe Verteilung haben.

**(K1):** Sei  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig (oder allgemeiner, integrierbar). Wir wollen, wie in den Übungen schon skizziert, das Integral  $\int_{[0,1]} g(x) dx$  mit Hilfe des SLLN berechnen und können dazu wie folgt vorgehen: Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i.i.d. und  $X_1 \sim \mathcal{U}(0, 1)$ . Dann ist nach Satz 6.12 auch die Folge  $(g \circ X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i.i.d. Nachdem jedes  $g \circ X_n$  offensichtlich auch integrierbar ist ( $g$  ist als stetige Funktion beschränkt) gilt nach dem SLLN

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g \circ X_i = \mathbb{E}(g \circ X_1) = \int_{[0,1]} g(x) dx \quad [P].$$

Mit Wahrscheinlichkeit eins konvergiert also das Stichprobenmittel  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g \circ X_i$  gegen das Integral  $\int_{[0,1]} g(x)dx$ . Die soeben skizzierte Vorgangsweise trägt den Namen *Monte-Carlo-Integration* und kann auch für höherdimensionale Integrale verwendet werden. Beachten Sie den Unterschied zum fixed-grid Design in der Numerik - bei Monte-Carlo-Integration werden die 'Auswertstellen' zufällig gewählt.

Interessant ist auch die Konvergenzgeschwindigkeit von  $I_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g \circ X_i$  gegen das Integral  $I := \int_{[0,1]} g(x)dx$ . Es lässt sich unschwer zeigen, dass eine Konstante  $V \geq 0$  existiert, sodass für jedes  $M > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  die folgende Abschätzung gilt (Übungsaufgabe):

$$P\left(|I_n - I| \geq \frac{M}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{V}{M^2} \tag{7.2}$$

**(K2):** Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen und beweisen dann den Fundamentalsatz der Statistik. Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine i.i.d. Folge von (nicht notwendigerweise integrierbaren) Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  $F$  bezeichne die Verteilungsfunktion jedes  $X_i$ . Weiters sei  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  eine beliebige Borel Menge. Dann ist auch  $(\mathbf{1}_B \circ X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine i.i.d. Folge von integrierbaren Zufallsvariablen. Das SLLN impliziert also auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_B \circ X_i}_{h_n(B)} = \mathbb{E}(\mathbf{1}_B \circ X_1) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_1^{-1}(B)}) = P(X_1^{-1}(B)) = P^{X_1}(B) \quad [P],$$

i.e. die relative Häufigkeit  $h_n(B)$  konvergiert gegen  $P^{X_1}(B)$  [P]. Beachten Sie, dass  $h_n(B)$  ebenfalls eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ist,  $h_n(B)(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_B \circ X_i(\omega)$ .

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  betrachten wir nun den Fall  $B = (-\infty, x]$  und die empirische Verteilungsfunktion  $F_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , definiert durch

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(X_i) = h_n((-\infty, x]). \tag{7.3}$$

Es gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = P^X((-\infty, x]) = F(x) \quad [P] \tag{7.4}$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}$ , i.e. für jedes feste  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die empirische Verteilungsfunktion  $F_n(x)$  gegen die 'richtige' Verteilungsfunktion  $F(x)$  mit Wahrscheinlichkeit eins. Sauber formuliert bedeutet dies also, dass für festes  $x \in \mathbb{R}$  eine Menge  $A_x \in \mathcal{A}$  mit  $P(A_x) = 1$  existiert, sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)(\omega) = F(x)$  für jedes  $w \in A_x$ . Im Allgemeinen wird die Menge  $A_x$  aber nicht für alle  $x \in \mathbb{R}$  gleich sein und es kann nicht ohne Weiteres auf die Existenz einer 'gemeinsamen' Menge  $A \in \mathcal{A}$  mit  $P(A) = 1$  geschlossen werden, sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)(\omega) = F(x)$  für jedes  $w \in A$  und JEDES  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Unter Zuhilfenahme der Monotonie kann aber sogar gleichmäßige Konvergenz gezeigt werden - es gilt das folgende Resultat:

**Satz 7.3 (Fundamentalsatz der Statistik, Satz von Glivenko-Cantelli)** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine i.i.d. Folge von (nicht notwendigerweise integrierbaren) Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F$ . Dann konvergiert die empirische Verteilungsfunktion mit Wahrscheinlichkeit eins gleichmäßig gegen  $F$ , i.e. es existiert  $A \in \mathcal{A}$  mit  $P(A) = 1$  sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x)(\omega) - F(x)| = 0 \tag{7.5}$$

für jedes  $\omega \in A$ .



**Beweis: (i):** Sei  $z \in \mathbb{R}$  fest. Wir wissen aus den vorhergehenden Bemerkungen, dass eine Menge  $A_z^1 \in \mathcal{A}$  mit  $P(A_z^1) = 1$  existiert, sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z)(\omega) = F(z)$  für jedes  $\omega \in A_z^1$ . Mit analogen Überlegungen (ersetze  $B = (-\infty, z]$  durch  $B = (-\infty, z)$ ) erhalten wir die Existenz einer Menge  $A_z^2 \in \mathcal{A}$  mit  $P(A_z^2) = 1$  sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z-)(\omega) = F(z-)$  für jedes  $\omega \in A_z^2$ . Setzen wir  $A_z := A_z^1 \cap A_z^2$  dann gilt offensichtlich  $P(A_z) = 1$ .

**(ii):** Sei  $2 \leq M \in \mathbb{N}$  beliebig aber fest. Setze  $x_j := F^-(j/M)$  für jedes  $j \in \{0, \dots, M-1\}$ ,  $x_M := \infty$  sowie

$$R_n := \max \left\{ |F_n(x_j) - F(x_j)| + |F_n(x_{j-}) - F(x_{j-})| : j \in \{1, \dots, M-1\} \right\}.$$

Wegen  $P(A_z) = 1$  gilt auch  $P(A_M) = 1$  für  $A_M = \bigcap_{j=1}^{M-1} A_{x_j}$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\omega) = 0$  für jedes  $\omega \in A$ . Falls  $x \in (x_{j-1}, x_j)$  dann folgt

$$F_n(x) \leq F_n(x_{j-}) \leq F(x_{j-}) + R_n \leq F(x) + R_n + \frac{1}{M}$$

sowie

$$F_n(x) \geq F_n(x_{j-1}) \geq F(x_{j-1}) - R_n \geq F(x) - R_n - \frac{1}{M}.$$

Nachdem für jedes  $x \notin \{x_1, \dots, x_{M-1}\}$  ein solches  $j$  mit  $x \in (x_{j-1}, x_j)$  existiert erhalten wir insgesamt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x)(\omega) - F(x)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} R_n + \frac{1}{M} = \frac{1}{M}$$

für jedes  $\omega \in A_M$  (also  $[P]$ ).

**(iii)**  $M \in \mathbb{N}$  war beliebig. Für jedes  $w \in A_\infty := \bigcap_{M=2}^\infty A_M$  gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x)(\omega) - F(x)| = 0,$$

woraus wegen  $P(A_\infty) = 1$  die gewünschte Behauptung sofort folgt. ■

**(K3):** Wir beweisen die (absolute) Normalität  $[\lambda]$ -fast aller reeller Zahlen in  $[0, 1)$  und beginnen mit einigen Vorbemerkungen. Gemäß Beispiel 6.8 können wir jedem  $\omega \in [0, 1)$  eine eindeutige Dezimaldarstellung  $\omega = \sum_{i=1}^\infty \frac{X_i(\omega)}{10^i}$  (ohne Periode 9 am Ende) mit  $X_i(\omega) \in \{0, \dots, 9\}$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$  zuweisen. Allgemeiner lässt sich bei gegebener natürlicher Zahl  $b \geq 2$  jedes  $\omega \in [0, 1)$  eindeutig in der Form  $\omega = \sum_{i=1}^\infty \frac{X_i(\omega)}{b^i}$  (ohne Periode  $b-1$  am Ende) mit  $X_i(\omega) \in \{0, \dots, b-1\}$  darstellen.

**Definition 7.4** Eine reelle Zahl  $\omega \in [0, 1)$  mit  $b$ -adischer Entwicklung  $\omega = \sum_{i=1}^\infty \frac{X_i(\omega)}{b^i}$  heisst normal zur Basis  $b \geq 2$  genau dann wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{j\}}(X_i(\omega)) = \frac{1}{b}$$

für jedes  $j \in \{0, \dots, b-1\}$ , i.e. wenn jede Ziffer asymptotisch mit der selben Frequenz  $1/b$  auftritt.

Wir nennen  $\omega \in [0, 1)$  absolut normal genau wenn  $\omega$  normal zu jeder Basis  $b \geq 2$  ist.

**Satz 7.5** *Es existiert  $A_{10} \in \mathcal{B}([0, 1])$  mit  $\lambda(A_{10}) = 1$  sodass jedes  $\omega \in A_{10}$  normal zur Basis 10 ist.*

**Beweis:** Laut Beispiel 6.8 sind die Zufallsvariable  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängig, also insbesondere paarweise unabhängig. Weiters erhalten wir für jedes  $j \in \{0, \dots, 9\}$  und  $n \in \mathbb{N}$  wegen

$$X_n^{-1}(\{j\}) = \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}=0}^9 \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{i_k}{10^k} + \frac{j}{10^n}, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{i_k}{10^k} + \frac{j+1}{10^n} \right)$$

sofort  $P(X_n = j) = 10^{n-1} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10}$ . Die Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist also i.i.d. und integrierbar. Sei  $j \in \{0, \dots, 9\}$  beliebig aber fest. Dann ist natürlich auch die Folge  $(\mathbf{1}_{\{j\}} \circ X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i.i.d. und integrierbar auf  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ . Anwendung des SLLN liefert damit sofort die Existenz einer Menge  $A_{10}^j \in \mathcal{B}([0, 1])$  mit  $\lambda(A_{10}^j) = 1$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{j\}} \circ X_i(\omega) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{j\}} \circ X_1) = P(X_1 = j) = \frac{1}{10}$$

für jedes  $\omega \in A_{10}^j$ . Setzen wir  $A_{10} := \bigcap_{j=0}^9 A_{10}^j$  dann gilt offensichtlich  $\lambda(A_{10}) = 1$ , also genau das gewünschte Resultat. ■

Der Fall eines beliebigen  $b \geq 2$  lässt sich vollkommen analog behandeln und man erhält die Existenz einer Menge  $A_b$  mit  $\lambda(A_b) = 1$  sodass jedes  $\omega \in A_b$  normal zur Basis  $b$  ist. Setzen wir

$$A_\infty := \bigcap_{b=2}^{\infty} A_b$$

dann folgt  $\lambda(A_\infty) = 1$  und jedes  $\omega \in A_\infty$  ist absolut normal - es gilt also das folgende überraschende Resultat:

**Satz 7.6** *Es existiert  $A \in \mathcal{B}([0, 1])$  mit  $\lambda(A) = 1$  sodass jedes  $\omega \in A$  absolut normal ist.*

**Bemerkung 7.7** Satz 7.6 steht im krassen Gegensatz zur Tatsache, dass keine einzige (!) reelle Zahl  $x \in [0, 1)$  bekannt ist, die absolut normal ist. Nichtsdestotrotz ist für  $Z \sim \mathcal{U}(0, 1)$  mit Wahrscheinlichkeit eins die Zahl  $Z(\omega)$  absolut normal.

## Kapitel 8

# Charakteristische Funktionen

Wir beginnen mit den folgenden Überlegungen: Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit  $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Für jedes feste  $t \in \mathbb{R}$  ist  $Y_t := e^{itX}$  eine  $\mathbb{C}$ -wertige Funktion auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , deren Real- und Imaginärteil reelle Zufallsvariable sind - wir nennen  $Y_t$  daher  $\mathbb{C}$ -wertige Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Unter hinreichenden Regularitätsbedingungen gilt dann

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itX)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{(itX)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}(X^k).$$

Der Identitätssatz für Potenzreihen liefert daher

$$\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{i^k \mathbb{E}(X^k)}{k!}, \quad \text{also} \quad \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k} = \mathbb{E}(X^k)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Die Momente  $\mathbb{E}(X^k)$  lassen sich also (unter hinreichenden Regularitätsbedingungen) direkt aus den Ableitungen der Funktion  $\varphi_X$  an der Stelle  $t = 0$  berechnen.

Der soeben skizzierte Zusammenhang kann tatsächlich sauber bewiesen werden - wir schauen uns im Folgenden die wichtigsten Eigenschaften der Zuordnung  $X \mapsto \varphi_X$  an und beweisen damit am Ende des Abschnitts den Zentralen Grenzwertsatz (CLT).

**Definition 8.1** Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann heißt die Funktion  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) \tag{8.1}$$

charakteristische Funktion von  $X$  bzw. charakteristische Funktion von  $P^X$ .

**Bemerkung 8.2** Für den absolut stetigen Fall  $X \sim \mu_f$  vereinfacht sich Gleichung (8.1) zu

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx,$$

$\varphi_X(t)$  entspricht also genau der (aus den Analysis Grundvorlesungen bekannten) Fourier Transformierten  $\hat{f}(-t)$  von  $f$ .

Charakteristische Funktionen von Zufallsvariablen haben die folgenden Eigenschaften:

**Lemma 8.3** Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $\varphi_X$  die entsprechende charakteristische Funktion. Dann gilt:

1.  $\varphi_X(0) = 1$ .
2.  $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Die Punkte folgen direkt aus der Definition der charakteristischen Funktion.

Das folgende Resultat ist ein erster Hinweis auf die Wichtigkeit von charakteristischen Funktionen hinsichtlich Summen unabhängiger Zufallsvariablen (Faltung):

**Lemma 8.4** Seien  $X, Y$  unabhängige Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ , dann gilt:

1.  $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .
2.  $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$ .

**Beweis:** Die erste Behauptung folgt aus der Unabhängigkeit von  $X, Y$  - es gilt nämlich

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}e^{it(X+Y)} = \mathbb{E}(e^{itX} e^{itY}) = \mathbb{E}e^{itX} \mathbb{E}e^{itY},$$

wobei die letzte Gleichheit durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil und Anwendung von Satz 6.14 folgt. Die zweite Behauptung ergibt sich unmittelbar aus

$$\varphi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}e^{it(aX+b)} = \mathbb{E}(e^{iatX} e^{itb}) = e^{itb} \mathbb{E}e^{iatX} = e^{itb} \varphi_X(at). \blacksquare$$

**Folgerung 8.5** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i.i.d. und  $X_1$  (und damit jedes  $X_n$ ) quadratisch integrierbar mit  $\sigma^2 := \mathbb{V}(X) > 0$ . Setzen wir  $\mu := \mathbb{E}X$ , dann ist die charakteristische Funktion  $\varphi_{Y_n}$  von  $Y_n := \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$  gegeben durch

$$\varphi_{Y_n}(t) = e^{-it \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}} \varphi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right)^n.$$

**Beweis:** Folgt wegen

$$Y_n := \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{X_j - \mu}{\sigma} = \sum_{j=1}^n \frac{X_j - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

sofort aus Lemma 8.4.  $\blacksquare$

**Beispiel 8.6** Mit Hilfe von Partieller Integration (oder eleganter mit Funktionentheorie) kann man zeigen, dass die charakteristische Funktion  $\varphi_Z$  für  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  gegeben ist durch

$$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Für  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  erhalten wir daher mit Hilfe von Lemma 8.4 sofort ( $X = \sigma Z + \mu$ )

$$\varphi_X(t) = e^{i\mu t} e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}}.$$

**Satz 8.7 (Eindeutigkeitssatz)** Die Verteilung einer Zufallsvariable  $X$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ist eindeutig durch die charakteristische Funktion  $\varphi_X$  bestimmt. Insbesondere gilt also für Zufallsvariable  $X, Y$  mit Verteilungsfunktion  $F_X$  bzw.  $F_Y$  die folgende Äquivalenz:

$$F_X = F_Y \iff \varphi_X = \varphi_Y$$

**Beweisskizze:** Der Satz kann bewiesen werden, indem man zeigt, dass die Verteilungsfunktion  $F_X$  von  $X$  vollständig durch die charakteristische Funktion  $\varphi_X$  bestimmt ist. Sind  $a, b$  Stetigkeitsstellen von  $F$ , dann gilt (Satz von Lévy)

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{[-T, T]} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt.$$

Nachdem die  $F_X$  als Verteilungsfunktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen haben kann ist  $F_X$  damit vollständig durch  $\varphi_X$  bestimmt und das Resultat folgt unmittelbar. ■

**Satz 8.8** Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion  $\varphi_X$  und  $|X|^k$  sei integrierbar für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\varphi_X$   $k$ -mal stetig differenzierbar und es gilt

$$\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}(X^n) \tag{8.2}$$

für jedes  $n \leq k$ .

**Beispiel 8.9** Wir berechnen  $\mathbb{E}(X)$  und  $\mathbb{E}(X^2)$  für  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  mit Hilfe von Satz 8.8: Wegen  $\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi_X'(t) &= e^{i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}} (i\mu - t\sigma^2) \\ \varphi_X''(t) &= e^{i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}} ((i\mu - t\sigma^2)^2 - \sigma^2) \end{aligned}$$

und damit  $\varphi_X'(0) = i\mu$  sowie  $\varphi_X''(0) = -(\mu^2 + \sigma^2)$ .

Für den Fall  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  können sogar ALLE Momente  $\mathbb{E}(X^k)$  unschwer über die Ableitungen der charakteristischen Funktion an der Stelle 0 berechnet werden (siehe Übungen).

**Definition 8.10** Seien  $F, F_1, F_2, \dots$  eindimensionale Verteilungsfunktionen. Wir sagen, dass  $F_n$  schwach (bzw. in Verteilung) gegen  $F$  konvergiert und schreiben  $F_n \xrightarrow{w} F$ , genau dann wenn für jede Stetigkeitsstelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  von  $F$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_0) = F(x_0)$$

gilt. Weiters sagen wir, eine Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert schwach gegen eine Zufallsvariable  $X$  (und schreiben  $X_n \xrightarrow{w} X$ ) genau dann wenn  $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$ .

**Beispiel 8.11** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Zufallsvariablen mit  $X_n \sim \mathcal{E}(\theta_n)$  und  $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ . Falls  $\theta_n \rightarrow \theta$  für  $n \rightarrow \infty$  dann gilt für jedes  $t \in \mathbb{R}$  auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(1 - e^{-\theta_n t}) \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t)] = [(1 - e^{-\theta t}) \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t)] = F_X(t).$$

Die Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert also schwach gegen  $X$ , i.e.  $X_n \xrightarrow{w} X$ .

**Beispiel 8.12** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Zufallsvariablen mit  $X_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$  und  $X \sim \text{Bin}(1, 0)$  (i.e.  $P(X = 0) = 1$ ). Dann ist  $F_X$  gegeben durch  $F_X(t) = \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t)$  und für jedes  $t \neq 0$  gilt

$$F_{X_n}(t) = P(X_n \leq t) \rightarrow F_X(t) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

An der Stelle 0 gilt aber  $F_{X_n}(0) = 0 \neq 1 = F_X(0)$  für alle  $n$ , nachdem 0 aber Unstetigkeitsstelle von  $F_X$  ist, gilt trotzdem  $X_n \xrightarrow{w} X$ .

**Satz 8.13 (Stetigkeitssatz von Lévy)** Seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Verteilungsfunktionen  $F, F_1, F_2, \dots$  und charakteristischen Funktionen  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ . Dann gilt:

$$F_n \xrightarrow{w} F \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Mit anderen Worten: Schwache Konvergenz der Verteilungsfunktionen ist äquivalent zur punktweisen Konvergenz der charakteristischen Funktionen.

**Bemerkung 8.14** Es gilt sogar noch etwas mehr: Ist  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge charakteristischer Funktionen, die punktweise gegen eine in 0 stetige Funktion  $\varphi$  konvergiert, dann ist  $\varphi$  ebenfalls charakteristische Funktion und die entsprechenden Verteilungsfunktionen  $F_n$  konvergieren schwach gegen die Verteilungsfunktion  $F$  von  $\varphi$ .

Mit den schon erwähnten Resultaten können wir nun den Zentralen Grenzwertsatz (Central Limit Theorem, CLT) sehr einfach beweisen ( $\Phi \dots$  Verteilungsfunktion von  $\mathcal{N}(0, 1)$ ):

**Satz 8.15 (CLT)** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine i.i.d. Folge quadratisch integrierbarer Zufallsvariable mit  $0 < \sigma^2 := \mathbb{V}(X_1) < \infty$ . Setzen wir  $\mu := \mathbb{E}(X)$  und definieren  $Z_n$  durch

$$Z_n := \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \sqrt{n} \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $F_{Z_n} \xrightarrow{w} \Phi$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Beweis:** Für  $Y := \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$  gilt offensichtlich  $\mathbb{E}(Y) = 0$  und  $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{V}(Y) = 1$ . Da  $Y$  insbesondere quadratisch integrierbar ist, folgt mit Satz 8.8 sofort, dass  $\varphi_Y$  zwei mal stetig differenzierbar ist und wir erhalten (Taylor Approximation)

$$\varphi_Y(t) = \varphi_Y(0) + \varphi'_Y(0)t + \varphi''_Y(0)\frac{t^2}{2} + \varepsilon(t)t^2 = 1 - \frac{t^2}{2} + \varepsilon(t)t^2$$

wobei  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ . Unter Anwendung von Lemma 8.4 folgt  $\varphi_{\frac{Y}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$  woraus sich für  $\varphi_{Z_n}(t)$  sofort

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left(\varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

ergibt. Da  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  genau die charakteristische Funktion von  $\mathcal{N}(0, 1)$  ist, folgt das gewünschte Resultat nun via Satz 8.13. ■

**Bemerkung 8.16** Unter den Voraussetzungen des CLT gilt also für großes  $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{n} \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

und damit

$$\overline{X_n} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

**Beispiel 8.17** Sei  $X \sim \text{Bin}(1, 0.25)$  und  $X_1, \dots, X_n$  mit  $n = 10000$  unabhängig. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $\bar{X}_n$  um mindestens 0.01 von  $p = 0.25$  abweicht approximativ mit Hilfe des CLT:

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}_n - 0.25| \geq 0.01) &= P\left(\frac{\sqrt{10000}}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75}} |\bar{X}_n - 0.25| \geq \frac{\sqrt{10000}}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75}} 0.01\right) \\ &\doteq 2\Phi\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \doteq 0.021 \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: In nur etwa 2.1% aller Fälle wird die Abweichung mindestens 0.01 sein.

Es existiert eine Vielzahl von allgemeineren Versionen des CLT, die auch für nicht notwendigerweise identisch verteilte quadratisch integrierbare Zufallsvariable gelten - das wohl allgemeinste Resultat ist der Satz von Lindeberg - wir formulieren hier die folgende etwas schwächere Version:

**Satz 8.18 (CLT, Lyapunov-Bedingung)** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger, quadratisch integrierbarer Zufallsvariable mit  $\sigma_n^2 = \mathbb{V}(X_n) > 0$  und  $\mu_n := \mathbb{E}(X_n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)^{\frac{2+\delta}{2}}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|X_i - \mu_i|^{2+\delta}) = 0 \quad (8.3)$$

dann gilt für

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)$$

$F_{Z_n} \xrightarrow{w} \Phi$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine i.i.d. Folge quadratisch integrierbarer Zufallsvariable mit  $\mu = \mathbb{E}(X)$  und  $\sigma^2 = \mathbb{V}(X) > 0$ . Laut dem SLLN (Satz 7.1) gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu \quad [P],$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{X}_n - \mu| = 0 \quad [P],$$

das SLLN liefert aber keine Konvergenzgeschwindigkeit. Mit Hilfe des CLT (Satz 8.15) kann zusätzlich die Wahrscheinlichkeit für Abweichungen vom Erwartungswert für großes  $n$  angegeben werden: Für  $n$  groß und  $\varepsilon > 0$  gilt

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X}_n - \mu| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \varepsilon\right) \doteq \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$$

bzw.

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \doteq 1 - \left(2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) - 1\right) = 2\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Noch interessanter ist die Frage nach der genauen Konvergenzgeschwindigkeit - das folgende Resultat liefert eine präzise Antwort:

**Satz 8.19 (Satz vom Iterierten Logarithmus, Satz von Hartman-Winter)**

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine i.i.d. Folge quadratisch integrierbarer Zufallsvariable mit  $0 < \sigma^2 := \mathbb{V}(X_1)$  und  $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ . Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2\sigma^2 \ln \ln n}} (\bar{X}_n - \mu) = 1 \quad [P] \quad (8.4)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2\sigma^2 \ln \ln n}} (\bar{X}_n - \mu) = -1 \quad [P]. \quad (8.5)$$

**Bemerkung 8.20** Satz 8.19 besagt insbesondere, dass Folge die  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definiert durch

$$a_n = \sqrt{\frac{2\sigma^2 \ln \ln n}{n}},$$

die folgende Eigenschaft hat: Ist  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine weitere Folge<sup>†</sup> mit  $b_n = o(a_n)$ , dann gilt offensichtlich

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} (\bar{X}_n - \mu) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{1}{a_n} (\bar{X}_n - \mu) = +\infty \quad [P].$$

Ist  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $a_n = o(b_n)$ , dann gilt hingegen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} (\bar{X}_n - \mu) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{1}{a_n} (\bar{X}_n - \mu) = 0 \quad [P].$$

---

<sup>†</sup>o bezeichnet das aus der Analysis bekannte Landau-Symbol, i.e.  $b_n = o(a_n)$  genau dann wenn  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$



# Kapitel 9

## Konvergenzbegriffe

Wir haben in den bisherigen Kapiteln schon einige Konvergenzbegriffe kennengelernt: Die im SLLN auftretende  $P$ -fast sichere Konvergenz sowie die im CLT vorkommende schwache Konvergenz (die äquivalent zur punktweisen Konvergenz der charakteristischen Funktion ist). Ziel dieses kurzen Abschnitts ist die Beschreibung der wesentlichen Zusammenhänge zwischen den wichtigsten Konvergenzbegriffen. Wir beginnen mit Eigenschaften der fast sicheren Konvergenz:

**Definition 9.1** Seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Wir sagen,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $P$ -fast sicher gegen  $X$  und schreiben  $X_n \xrightarrow{[P]} X$  genau dann wenn eine Menge  $A \in \mathcal{A}$  mit  $P(A) = 1$  existiert, sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$  für jedes  $\omega \in A$ .

Unter den Voraussetzungen des SLLN konvergiert also die Folge  $\bar{X}_n$  fast sicher gegen die konstante Zufallsvariable  $X = \mathbb{E}(X_1)$ , i.e.

$$\bar{X}_n \xrightarrow{[P]} \mathbb{E}(X_1).$$

Die  $P$ -fast sichere Konvergenz kann wie folgt charakterisiert werden:

**Satz 9.2** Für Zufallsvariable  $X, X_1, X_2, \dots$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $X_n \xrightarrow{[P]} X$ .
2. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{k \geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon) = 0$ .<sup>†</sup>
3. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n^\varepsilon) = 0$  wobei  $A_n^\varepsilon := \{\omega \in \Omega : |X_n - X| \geq \varepsilon\}$ .
4.  $P(A_\infty) = 0$  für

$$A_\infty := \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} \left\{ \omega \in \Omega : |X_k - X| \geq \frac{1}{M} \right\}.$$

**Beweis:** Wir beweisen die Äquivalenz der ersten zwei Aussagen, der Beweis der verbleibenden Äquivalenzen ist eine Übungsaufgabe. Angenommen  $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$  für alle  $\omega \in A \in \mathcal{A}$  und

---

<sup>†</sup>i.e. für  $A_n^\varepsilon = \{\omega \in \Omega : \sup_{k \geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\}$  gilt  $P(A_n^\varepsilon) \rightarrow 0$

$P(A) = 1$ . Weiters sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir setzen  $A_n := \{\omega \in \Omega : \sup_{k \geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Falls  $\omega \in A$  dann existiert ein Index  $n_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $\omega \in A_n^c$  für alle  $n \geq n_0$ , also insbesondere  $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ . Damit folgt  $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$  und wir erhalten  $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = 1$  sowie  $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ . Nachdem die Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  offensichtlich monoton fallend ist folgt die gewünschte Aussage sofort aus der Stetigkeit von oben.

Gilt umgekehrt die zweite Aussage des Satzes dann folgt für die monoton fallende Folge  $(A_n^M)_{n \in \mathbb{N}}$ , definiert durch

$$A_n^M := \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{k \geq n} |X_k - X| \geq \frac{1}{M} \right\}$$

sofort  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^M) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^M)$ ,  $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^M)^c) = 1$  und damit

$$P\left(\underbrace{\bigcap_{M=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^M)^c}_{=: A}\right) = 1.$$

Nachdem für jedes  $\omega \in A$  offensichtlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$  gilt folgt daraus sofort  $X_n \xrightarrow{[P]} X$ . ■

**Definition 9.3** Seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Wir sagen,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen  $X$  und schreiben  $X_n \xrightarrow{P} X$  genau dann wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

für jedes  $\varepsilon > 0$ .

Unter den Voraussetzungen des WLLN (in der Form von Folgerung 5.28) konvergiert die Folge der Mittelwerte  $(\bar{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in Wahrscheinlichkeit gegen die konstante Zufallsvariable  $X = \mathbb{E}(X_1)$ , i.e.

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_1).$$

**Satz 9.4** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge quadratisch integrierbarer Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , die die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = a \in \mathbb{R}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(X_n) = 0$

Dann folgt  $X_n \xrightarrow{P} a$ .

**Beweis:** Übungsaufgabe

**Satz 9.5** Seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann folgt aus  $X_n \xrightarrow{[P]} X$  die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit  $X_n \xrightarrow{P} X$ . Mit anderen Worten:  $P$ -fast sichere Konvergenz impliziert Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

**Beweis:** Direkte Folgerung von Aussage 2 in Satz 9.2 und Definition 9.3. ■

**Satz 9.6** Seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann folgt aus  $X_n \xrightarrow{P} X$  die schwache Konvergenz  $X_n \xrightarrow{w} X$ . Mit anderen Worten: Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert schwache Konvergenz.

**Beweis:** Seien  $F, F_1, F_2, \dots$  die entsprechenden Verteilungsfunktionen,  $x_0$  eine Stetigkeitsstelle von  $F$  und  $\varepsilon > 0$ . Ist  $X_n(\omega) \leq x_0$  dann gilt zumindest eine der folgenden zwei Aussagen: (i)  $X(\omega) \leq x_0 + \varepsilon$  oder (ii)  $|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon$ . Daraus folgt

$$F_n(x_0) = P(X_n \leq x_0) \leq \underbrace{P(X \leq x_0 + \varepsilon)}_{F(x_0 + \varepsilon)} + P(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon).$$

Da die Ungleichung

$$F(x_0 - \varepsilon) \leq F_n(x_0) + P(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon)$$

vollkommen analog folgt, erhalten wir insgesamt

$$F(x_0 - \varepsilon) - P(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) \leq F_n(x_0) \leq F(x_0 + \varepsilon) + P(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon).$$

Anwendung von  $\liminf$  und  $\limsup$  und Verwendung von  $X_n \xrightarrow{P} X$  liefert

$$F(x_0 - \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_0) \leq F(x_0 + \varepsilon).$$

Die gewünschte Aussage  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_0) = F(x_0)$  folgt nun unmittelbar durch Grenzwertbildung von  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . ■

**Bemerkung 9.7** Beispiel dafür, dass die Umkehrungen von Satz 9.5 und Satz 9.6 falsch sind, sind Übungsaufgaben.

Stetigkeit erhält alle drei Konvergenzbegriffe - es gilt das folgende, für eine Vielzahl von Anwendungen wichtige Resultat:

**Satz 9.8 (Continuous mapping theorem, einfache Version)** Seien  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Falls es eine Menge  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit  $\mathbb{P}(X \in C) = 1$  gibt, sodass  $g$  in jedem Punkt  $x \in C$  stetig ist, dann gelten die folgenden drei Aussagen:

1. Aus  $X_n \xrightarrow{[P]} X$  folgt  $g(X_n) \xrightarrow{[P]} g(X)$
2. Aus  $X_n \xrightarrow{P} X$  folgt  $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$
3. Aus  $X_n \xrightarrow{w} X$  folgt  $g(X_n) \xrightarrow{w} g(X)$

**Beweis:** Mit Grundkenntnissen in Maßthorie leicht lösbare Übungsaufgabe.

## Kapitel 10

# Schätzfunktionen und deren Eigenschaften

**Definition 10.1** Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. mit derselben Verteilung wie  $X$ . Dann heißt  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe von  $X$ . Eine konkret beobachtete Realisierung der Zufallsstichprobe nennen wir kurz Stichprobe und bezeichnen sie zwecks klarer Unterscheidung mit  $(x_1, \dots, x_n)$ .<sup>†</sup>

Wir starten mit dem folgenden einführenden Beispiel:

**Beispiel 10.2** Sei  $X \sim \text{Bin}(1, p)$  mit unbekanntem  $p \in [0, 1]$  (Meinungsumfrage, Qualitätskontrolle, etc.). Wir möchten den Parameter  $p$  mit Hilfe von beobachteten Realisierungen  $x_1, \dots, x_n$  einer Zufallsstichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  schätzen. Naheliegenderweise betrachten wir den 'Schätzwert'

$$\hat{\theta}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i =: T_n(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]$$

und erwarten, dass für hinreichend großes  $n$  der Schätzwert  $\hat{\theta}_n$  nahe bei  $p$  liegt. Der Grund für unsere Erwartungshaltung ist wie folgt - betrachten wir die Zufallsvariable

$$\hat{\theta}_n = T_n(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

dann gilt offensichtlich  $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}(X) = p$  und das SLLN impliziert  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{[P]} \mathbb{E}(X) = p$ .

Im Folgenden gehen wir meist davon aus, dass die Verteilung von  $X$  aus einer parametrischen Familie  $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  stammt<sup>†</sup> -  $\theta$  steht hierbei für einen nicht-notwendigerweise eindimensionalen Parameter. Das vorhergehende Beispiel betrachtet den eindimensionalen Fall  $\theta \in \Theta = [0, 1]$ ,  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  entspricht dem Fall  $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ . Im Folgenden schreiben wir auch kurz  $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  und meinen damit, dass  $X \sim P_\theta$  für ein  $\theta \in \Theta$ .

**Definition 10.3** Gelte  $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ,  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$  und sei  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe von  $X$ . Weiters sei  $T_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \Theta$  Borel messbar. Dann heißt  $\hat{\theta}_n := T_n(X_1, \dots, X_n)$

<sup>†</sup>Mit anderen Worten  $(x_1, \dots, x_n) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  für ein  $\omega \in \Omega$ .

<sup>†</sup>Wir könnten genauso gut die Familie  $(F_\theta)_{\theta \in \Theta}$  der Verteilungsfunktionen verwenden.

Schätzfunktion (estimator) für  $\theta$ . Der aus einer konkreten Realisierung berechnete Wert (bzw. Vektor)  $\hat{\theta}_n := T_n(x_1, \dots, x_n)$  wird Schätzwert (estimate) genannt.

**Bemerkung 10.4** Für  $d = 1$  ist also jede Schätzfunktion automatisch Zufallsvariable, im allgemeinen Fall sind Schätzer  $d$ -dimensionale Zufallsvektoren. Im Folgenden werden wir uns hauptsächlich auf den eindimensionalen Fall konzentrieren.

In der Literatur werden sowohl Schätzfunktionen als auch Schätzwerte kurz als *Schätzer* bezeichnet (am Anfang etwas gewöhnungsbedürftig) - wir werden im Folgenden ebenfalls kurz von Schätzern sprechen.

Um 'gute' Schätzer zu konstruieren muss zuerst klar sein, wie sinnvolle Gütekriterien aussehen - die natürlichsten Forderungen sind die im Folgenden betrachtete Erwartungstreue und Konsistenz. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir (wie allgemein üblich) für den Fall, dass  $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$

$$\mathbb{E}_\theta(X) := \int_{\Omega} X dP_\theta, \tag{10.1}$$

i.e.  $\mathbb{E}_\theta(X)$  bezeichnet den Erwartungswert von  $X$  unter der Annahme  $X \sim P_\theta$ .  $\mathbb{V}_\theta(X)$ ,  $P_\theta^X(A)$ , etc. sind analog zu verstehen.

**Definition 10.5** Sei  $\hat{\theta}_n$  ein Schätzer von  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ . Dann heißt  $\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n) - \theta$  Verzerrung von  $\hat{\theta}_n$ . Der Schätzer  $\hat{\theta}_n$  heißt erwartungstreu (oder unverzerrt, unbiased) genau dann wenn  $\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n) = \theta$  für jedes  $\theta \in \Theta$ .

**Definition 10.6** Ein Schätzer  $\hat{\theta}_n$  von  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$  heißt konsistent genau dann wenn  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ .  $\hat{\theta}_n$  heißt stark konsistent genau dann wenn sogar  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{[P]} \theta$ .

**Beispiel 10.7** Der in Beispiel 10.2 betrachtete Schätzer  $\hat{\theta}_n$  von  $\theta = p \in [0, 1]$  ist also erwartungstreu und stark konsistent. Generell gilt für integrierbares  $X$ , dass das Stichprobenmittel  $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$  ein erwartungstreuer und stark konsistenter Schätzer für den Erwartungswert ist. Entspricht also der Parameter  $\theta$  einer Familie  $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  genau dem Erwartungswert  $\mathbb{E}_\theta(X)$ , dann ist das Stichprobenmittel ein erwartungstreuer und stark konsistenter Schätzer für  $\theta = \mathbb{E}_\theta(X)$ ; dies trifft insbesondere auf die Normal- und die Poisson Verteilung zu.

**Beispiel 10.8** Sei  $X$  quadratisch integrierbar - es soll ein Schätzer für die Varianz  $\theta := \mathbb{V}(X)$  konstruiert werden. Wir unterscheiden die folgenden zwei Situationen:

(a) Der Erwartungswert  $\mu := \mathbb{E}(X)$  ist bekannt: Offensichtlich ist dann  $\hat{\theta}_n$ , definiert durch

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \tag{10.2}$$

wegen  $\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}_\theta(X_1 - \mu)^2 = \mathbb{V}_\theta(X) = \theta$  ein erwartungstreuer Schätzer von  $\theta = \mathbb{V}(X)$ .

(b) In der Praxis ist  $\mu = \mathbb{E}(X)$  meist unbekannt - wir betrachten als Schätzer daher die schon bekannte Stichprobenvarianz

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \tag{10.3}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n) &= \frac{1}{n-1} \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X}_n - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (\bar{X}_n - \mu)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X}_n - \mu)^2 \right] = \frac{1}{n-1} (n\mathbb{V}_\theta(X) - \mathbb{V}_\theta(X)) \\ &= \mathbb{V}_\theta(X) = \theta,\end{aligned}$$

$\hat{\theta}_n$  ist also erwartungstreu. Mit Hilfe des SLLN kann auch leicht gezeigt werden, dass  $\hat{\theta}_n$  sowohl im Fall (a) als auch im Fall (b) ein stark konsistenter Schätzer des Parameters  $\theta = \mathbb{V}_\theta(X)$  ist (Übungsaufgabe).

Hätten wir im vorhergehenden Beispiel den Schätzer

$$\tilde{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

betrachtet, dann wäre  $\tilde{\theta}_n$  zwar nicht erwartungstreu, wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\theta(\tilde{\theta}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \theta = \theta$$

geht die Verzerrung für  $n \rightarrow \infty$  aber gegen Null. Schätzer mit dieser Eigenschaft nennen wir asymptotisch erwartungstreu:

**Definition 10.9** Ein Schätzer  $\hat{\theta}_n$  von  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$  heißt asymptotisch erwartungstreu (asymptotically unbiased) genau dann wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n) = \theta$  für jedes  $\theta \in \Theta$ .

Asymptotisch erwartungstreue Schätzer  $\hat{\theta}_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}_\theta \hat{\theta}_n = 0$  sind automatisch konsistent - es gilt das folgende Resultat:

**Satz 10.10** Sei  $\hat{\theta}_n$  ein quadratisch integrierbarer, asymptotisch erwartungstreuer Schätzer von  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ , der zusätzlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n) = 0$  für jedes  $\theta \in \Theta$  erfüllt. Dann ist  $\hat{\theta}_n$  konsistent für  $\theta$ .

**Beweis:** Direkte Folgerung aus Satz 9.4. ■

Falls  $\hat{\theta}_n$  ein erwartungstreuer Schätzer von  $\theta$  ist, dann wäre natürlich wünschenswert, dass  $\hat{\theta}_n$  möglichst kleine Varianz hat. Die folgenden zwei Resultate zeigen, wie groß die Varianz eines erwartungstreuen Schätzers mindestens sein muss:

**Satz 10.11 (Informationsungleichung, Satz von Cramér-Rao; diskreter Fall)** Sei  $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  eine diskrete Zufallsvariable mit (von  $\theta$  unabhängigem) Wertebereich  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq \mathbb{R}$  und  $f(\alpha_i; \theta) := P_\theta(X = \alpha_i)$  für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Weiters seien die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

1.  $\Theta$  ist ein offenes Intervall.
2.  $\frac{\partial f(\alpha_i; \theta)}{\partial \theta}$  existiert für jedes  $\alpha_i$  und ist endlich.

3.  $f(\alpha_i; \theta) > 0$  für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  und  $\theta \in \Theta$ .

Dann erfüllt jeder erwartungstreue Schätzer  $\hat{\theta}_n$  von  $\theta$  die sogenannte Informationsungleichung

$$\mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{nI(\theta)}, \quad (10.4)$$

wobei die Fisher-Information  $I(\theta)$  gegeben ist durch

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \ln f(\alpha_i; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(\alpha_i; \theta). \quad (10.5)$$

**Beispiel 10.12** Wir berechnen für den erwartungstreuen Schätzer  $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$  aus Beispiel 10.2 Fisher Information und Varianz und konzentrieren uns auf den Fall  $\theta = (0, 1)$  (warum bedeutet dies keine Einschränkung?). Wir sind in der Situation  $k = 2$ ,  $\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{0, 1\}$  sowie  $f(x; \theta) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}$  und erhalten daher

$$\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (x \ln \theta + (1 - x) \ln(1 - \theta)) = \frac{x}{\theta} - \frac{1 - x}{1 - \theta} = \frac{x - \theta}{\theta(1 - \theta)}.$$

Damit folgt

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial \ln f(\alpha_i; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(\alpha_i; \theta) = \left( \frac{0 - \theta}{\theta(1 - \theta)} \right)^2 (1 - \theta) + \left( \frac{1 - \theta}{\theta(1 - \theta)} \right)^2 \theta = \frac{1}{\theta(1 - \theta)}.$$

Für die Varianz  $\mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n)$  erhalten wir sofort

$$\mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n) = \mathbb{V}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \mathbb{V}_\theta(X_1) = \frac{\theta(1 - \theta)}{n} = \frac{1}{nI(\theta)},$$

die Varianz unseres erwartungstreuen Schätzers ist also kleinstmöglich. Darüberhinaus ist unser Schätzer nach dem SLLN auch stark konsistent.  $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$  ist also optimal für den Parameter  $\theta = p$  der  $Bin(1, p)$ -Verteilung.

**Satz 10.13 (Informationsungleichung, Satz von Cramér-Rao; absolut stetiger Fall)**

Sei  $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  eine absolut stetige Zufallsvariable,  $f(x; \theta)$  bezeichne die entsprechende von  $\theta$  abhängige Dichte. Weiters seien die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

1.  $\Theta$  ist ein offenes (nicht notwendigerweise endliches) Intervall.
2.  $\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta}$  existiert für jedes  $x$  und ist endlich.
3. Der Träger von  $P_\theta$  ist von  $\theta$  unabhängig.<sup>†</sup>
4. Ableitung und Integration bezüglich  $\theta$  können vertauscht werden, i.e. für integrierbares  $g$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x; \theta) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx.$$

<sup>†</sup>Der Träger eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  ist definiert als die Menge aller Punkte  $x$  für die gilt:  $\mu(B_r(x)) > 0$  für jedes offene Intervall  $B_r(x) := (x - r, x + r)$  mit  $r > 0$ .

5.  $\mathbb{E}_\theta \left( \frac{d \ln f(X; \theta)}{d\theta} \right)^2 \in (0, \infty)$  für jedes  $\theta \in \Theta$ .

Dann erfüllt jeder erwartungstreue Schätzer  $\hat{\theta}_n$  von  $\theta$  die sogenannte Informationsungleichung

$$\mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{nI(\theta)}, \quad (10.6)$$

wobei die Fisher-Information  $I(\theta)$  gegeben ist durch

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) dx. \quad (10.7)$$

**Bemerkung 10.14** Unter etwas stärkeren Regularitätsbedingungen (Existenz der zweiten Ableitung nach  $\theta$  und Vertauschbarkeit selbiger mit dem Integral) kann gezeigt werden, dass die Fisher-Information  $I(\theta)$  auch gegeben ist durch

$$I(\theta) = -\mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial^2 \ln f(X; \theta)}{\partial \theta^2} \right) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta^2} f(x; \theta) dx. \quad (10.8)$$

In einigen Fällen lässt sich (10.8) leichter berechnen als (10.7).

**Beispiel 10.15** Wir betrachten den Fall  $X \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ , wobei  $\sigma^2 \in (0, \infty)$  bekannt ist, und das Stichprobenmittel  $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$  als erwartungstreuen Schätzer von  $\theta$ . Offensichtlich gilt dann

$$\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Die Dichte

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \quad \theta \in \Theta = (-\infty, \infty)$$

erfüllt die ersten vier Regularitätsvoraussetzungen von Satz 10.13 und die Fisher-Information berechnet sich wegen

$$\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} = \frac{x - \theta}{\sigma^2}$$

zu

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left( \frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E}_\theta (X - \theta)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2} \in (0, \infty).$$

Es ist also auch die fünfte Regularitätsbedingung erfüllt und wir erhalten insgesamt

$$\frac{\sigma^2}{n} = \mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Der Schätzer  $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$  hat also kleinstmögliche Varianz und ist darüberhinaus nach dem SLLN auch stark konsistent.

**Bemerkung 10.16** Nicht in allen Fällen ist es möglich, erwartungstreue Schätzer zu konstruieren, deren Varianz gleich der Cramér-Rao Schranke ist.

**Definition 10.17** Ein Schätzer  $\hat{\theta}_n$  von  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$  heißt effizient genau dann wenn er erwartungstreu ist und die Cramér-Rao-Schranke für die Varianz annimmt, i.e. wenn

$$\mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{nI(\theta)}$$

für jedes  $\theta \in \Theta$ .



# Kapitel 11

## Konstruktion von Schätzern

Wir betrachten im Folgenden die zwei gängigsten Methoden zur Konstruktion von Schätzern - die Maximum Likelihood Methode und die Momentenmethode.

### 11.1 Maximum Likelihood Schätzer

Sei  $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ,  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe von  $X$  und  $(x_1, \dots, x_n)$  eine konkrete Realisierung. Wie im letzten Abschnitt verwenden wir dieselbe Notation für den diskreten und den absolut stetigen Fall:

- Falls  $X$  diskret mit (vom Parameter  $\theta$  unabhängigen) Wertebereich  $W = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$  ist, schreiben wir

$$f(x; \theta) := P_\theta(X = x)$$

für jedes  $x \in W$ .

- Falls  $X$  absolut stetig ist, bezeichnet  $f(x; \theta)$  wie gewohnt die Dichte von  $P_\theta$ .

**Definition 11.1** Sei  $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ,  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe von  $X$  und  $(x_1, \dots, x_n)$  eine konkrete Realisierung. Dann heißt die Funktion

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \tag{11.1}$$

Likelihood Funktion (kurz: Likelihood).

Im diskreten Fall entspricht  $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  also genau der Wahrscheinlichkeit

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n),$$

im absolut stetigen Fall genau dem Wert der Wahrscheinlichkeitsdichte des Vektors  $(X_1, \dots, X_n)$  an der Stelle  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Die Grundidee der Maximum Likelihood Methode besteht nun einfach darin, als Schätzer  $\hat{\theta}_n$  für  $\theta$  jenen Wert aus  $\Theta$  zu verwenden, der  $L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$  maximiert (falls existent). Im diskreten Fall bedeutet dies also, dass man genau jenen Parameter sucht, für den die beobachtete Realisierung maximale Wahrscheinlichkeit hat.

Bevor wir Maximum Likelihood (kurz: ML) Schätzer allgemein definieren, betrachten wir das folgende einfache Beispiel, das die Nützlichkeit und Güte von ML-Schätzern gut illustriert.

**Beispiel 11.2** Sei  $X \sim (Bin(1, \theta))_{\theta \in [0,1]}$ . Dann erhalten wir für die Likelihood Funktion

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Für  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  folgt  $L(x_1, \dots, x_n; \theta) = (1 - \theta)^n$ , die Likelihood Funktion ist also streng monoton fallend in  $\theta$  und das Maximum wird in  $\theta = 0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  angenommen.
2. Für  $\sum_{i=1}^n x_i = n$  folgt  $L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \theta^n$ , die Likelihood Funktion ist also streng monoton wachsend in  $\theta$  und das Maximum wird in  $\theta = 1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  angenommen.
3.  $\sum_{i=1}^n x_i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ . Nachdem  $L(x_1, \dots, x_n; \theta) \geq 0$  für jedes  $\theta \in [0, 1]$  und  $L(x_1, \dots, x_n; 0) = 0 = L(x_1, \dots, x_n; 1)$  reicht es,  $\theta \in (0, 1)$  zu betrachten und, zur Vereinfachung der Rechenarbeit, lokale Extrema von  $\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  zu berechnen: Wir setzen  $k := \sum_{i=1}^n x_i$ , erhalten

$$\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = k \ln \theta + (n - k) \ln(1 - \theta)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} &= \frac{k}{\theta} - \frac{n - k}{1 - \theta} = \frac{k - \theta n}{\theta(1 - \theta)} \\ \frac{\partial^2 \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta^2} &= -\frac{k}{\theta^2} - \frac{n - k}{(1 - \theta)^2} < 0. \end{aligned}$$

Damit ist  $\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  genau dann maximal wenn  $\theta = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

Alle drei Fälle liefern also dasselbe Resultat

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n,$$

i.e. der durch Maximierung des Likelihood erhaltenen Schätzer ist genau  $\bar{X}_n$ . Nachdem  $\bar{X}_n$  laut Beispiel 10.15 effizient für  $\theta$  ist, liefert also die Maximierung des Likelihood einen effizienten und noch dazu stark konsistenten Schätzer.

**Definition 11.3** Sei  $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  und  $(X_1, \dots, X_n)$  eine Zufallsstichprobe von  $X$ . Dann heißt ein Schätzer  $\hat{\theta}_n$  von  $\theta$  Maximum Likelihood Schätzer (MLE) genau dann wenn

$$L(X_1, \dots, X_n; \hat{\theta}_n) = \sup_{\theta \in \Theta} L(X_1, \dots, X_n; \theta),$$

i.e. wenn er den Likelihood maximiert.

**Bemerkung 11.4** Maximum Likelihood Schätzer müssen (im Allgemeinen) weder existieren noch eindeutig sein.

**Beispiel 11.5** Wir betrachten den Fall  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  mit  $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$  und berechnen den MLE für  $\theta$ . Die Likelihood Funktion hat folgende Form:

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{-\frac{(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2}} = (2\pi\theta_2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\theta_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2}$$

Wir können zur Berechnung des Maximums die partiellen Ableitungen von  $\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2)$  nach  $\theta_1$  und  $\theta_2$  betrachten und Null setzen:

$$\begin{aligned} \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi\theta_2) - \frac{1}{2\theta_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2 \\ \frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} &= \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1) \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} &= -\frac{n}{2\theta_2} + \frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir daher sofort

$$\hat{\theta}_n = ((\hat{\theta}_1)_n, (\hat{\theta}_2)_n) = \left( \bar{X}_n, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right).$$

Aus den vorhergehenden Kapiteln wissen wir, dass sowohl  $(\hat{\theta}_1)_n$  als auch  $(\hat{\theta}_2)_n$  stark konsistente Schätzer von  $\theta_1 = \mu$  bzw.  $\theta_2 = \sigma^2$  sind. Weiters ist  $(\hat{\theta}_1)_n$  erwartungstreu,  $(\hat{\theta}_2)_n$  asymptotisch erwartungstreu.

**Bemerkung 11.6** Wie vorhin schon erwähnt entspricht der MLE im diskreten Fall jenem Parameter  $\theta$  für den die beobachtete Realisierung maximale Wahrscheinlichkeit hat. Obwohl diese Interpretation offensichtlich nicht direkt auf den absolut stetigen Fall übertragen werden kann (jede Realisierung hat Wahrscheinlichkeit Null) kann das 'Funktionieren' der MLE Methode auch in diesem Fall wie folgt *heuristisch* begründet werden: Angenommen  $X \sim P_{\theta_0}$  für ein  $\theta_0 \in \Theta$  und  $(X_1, \dots, X_n)$  ist eine Zufallsstichprobe von  $X$ . Unter der Voraussetzung, dass  $\ln(f(X_1; \theta))$  integrierbar ist liefert das SLLN

$$\frac{1}{n} \ln L(X_1, \dots, X_n; \theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(f(X_i; \theta)) \xrightarrow{[P]} \mathbb{E}_{\theta_0}(\ln(f(X_1; \theta))) = \int_{\mathbb{R}} \ln(f(x; \theta)) f(x, \theta_0) dx.$$

Unter Verwendung der Ungleichung  $\ln x \leq x - 1$  folgt weiter

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0}(\ln(f(X_1; \theta))) - \mathbb{E}_{\theta_0}(\ln(f(X_1; \theta_0))) &= \int_{\mathbb{R}} \ln(f(x; \theta)) f(x; \theta_0) dx - \int_{\mathbb{R}} \ln(f(x; \theta_0)) f(x; \theta_0) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \ln\left(\frac{f(x; \theta)}{f(x; \theta_0)}\right) f(x; \theta_0) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x; \theta)}{f(x; \theta_0)} - 1\right) f(x; \theta_0) dx = 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{1}{n} \ln L(X_1, \dots, X_n; \theta) \leq \mathbb{E}_{\theta_0}(\ln(f(X_1; \theta))) \leq \mathbb{E}_{\theta_0}(\ln(f(X_1; \theta_0))).$$

Mit anderen Worten,  $L(X_1, \dots, X_n; \theta)$  sollte asymptotisch für  $\theta = \theta_0$  maximal werden.

Allgemein haben Maximum-Likelihood Schätzer für den Fall, dass  $f(x; \theta)$  gewisse, nicht allzu restriktive Regularitätsbedingungen erfüllt (im Wesentlichen Glattheit von  $f(x; \theta)$ , Kompaktheit des Parameterraums  $\Theta$  und Eindeutigkeit des MLE) gute Eigenschaften. Nachdem wir an dieser Stelle nicht näher auf diese Bedingungen eingehen können, zählen wir die wesentlichsten 'guten' asymptotischen Eigenschaften nur ohne Beweis und genaue Formulierung der Voraussetzungen im folgenden Satz auf.

**Satz 11.7** Sei  $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  mit  $\Theta \subseteq \mathbb{R}$  und  $\hat{\theta}_n$  Maximum Likelihood Schätzer von  $\theta$ . Unter gewissen Regularitätsvoraussetzung hat  $\hat{\theta}_n$  die folgenden Eigenschaften:

1.  $\hat{\theta}_n$  ist konsistent für  $\theta$ , i.e. für jedes feste  $\theta_0 \in \Theta$  gilt: falls  $X \sim P_{\theta_0}$  dann folgt  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$ .
2.  $\hat{\theta}_n$  ist invariant, i.e. für eine messbare Funktion  $g$  ist  $g \circ \hat{\theta}_n$  Maximum Likelihood Schätzer von  $g(\theta)$ .
3.  $\hat{\theta}_n$  ist asymptotisch normal, i.e. für jedes feste  $\theta_0 \in \Theta$  gilt: falls  $X \sim P_{\theta_0}$  dann folgt

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{w} Z$$

wobei  $Z \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{I(\theta_0)})$ .

**Beispiel 11.8** Wir kehren nochmals zurück zur in Beispiel 11.2 beschriebenen Situation. Wie schon erwähnt ist  $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$  sogar stark konsistent und effizient, es gilt also etwas mehr als Aussage eins in Satz 11.7. Falls  $X \sim \text{Bin}(1, \theta_0)$ , dann impliziert das CLT (Satz 8.15), dass

$$Z_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \theta_0}{\sqrt{\theta_0(1 - \theta_0)}} \xrightarrow{w} Z$$

wobei  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Wegen  $I(\theta_0) = \frac{1}{\theta_0(1 - \theta_0)}$  folgt daraus sofort die dritte Aussage in Satz 11.7.

## 11.2 Momentenschätzer

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel, das die, der Momentenmethode zugrundeliegende Idee veranschaulicht:

**Beispiel 11.9** Sei  $X \sim (\mathcal{E}(\theta))_{\theta \in (0, \infty)}$ . Für Zufallsstichproben  $X_1, X_2, \dots, X_n$  von  $X$  impliziert das SLLN

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{[P]} \mathbb{E}_\theta(X) = \frac{1}{\theta} =: g(\theta).$$

Nachdem  $g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  bijektiv und stetig ist, ist

$$\hat{\theta}_n := g^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

ein stark konsistenter Schätzer von  $\theta$  (vergleiche mit dem MLE für  $\theta$  in den Übungen).

Für  $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  mit  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$  kann analog vorgegangen werden: Angenommen  $X^d$  ist integrierbar und es existieren Funktionen  $g_1, g_2, \dots, g_d$  sodass  $\mathbb{E}_\theta(X^k) = g_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) = g_k(\theta)$  für jedes  $k \in \{1, \dots, d\}$ . Dann impliziert das SLLN

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i &\xrightarrow{[P]} g_1(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 &\xrightarrow{[P]} g_2(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ &\vdots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^d &\xrightarrow{[P]} g_d(\theta_1, \dots, \theta_d) \end{aligned}$$

und wir erhalten einen Schätzer  $\hat{\theta}_n = ((\hat{\theta}_1)_n, (\hat{\theta}_2)_n, \dots, (\hat{\theta}_d)_n)$  für  $\theta$  falls das  $d$ -dimensionale Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} m_1 &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = g_1(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ m_2 &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = g_2(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ &\vdots \\ m_d &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^d = g_d(\theta_1, \dots, \theta_d) \end{aligned} \right\} =: \mathbf{g}(\theta) \quad (11.2)$$

eindeutig nach  $\theta$  auflösbar ist. Der resultierende Schätzer  $\hat{\theta}_n = \mathbf{g}^{-1}(m_1, \dots, m_d)$  heißt *Momentenschätzer von  $\theta$* .  $\hat{\theta}_n = \mathbf{g}^{-1}(m_1, \dots, m_d)$  ist automatisch stark konsistent wenn  $\mathbf{g}$  stetig ist.

**Beispiel 11.10** Sei  $X \sim \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2)_{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)}$ . Wir berechnen den Momentenschätzer von  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ : Wegen  $\mathbb{E}_\theta(X) = \theta_1$  und  $\mathbb{E}_\theta(X^2) = \mathbb{V}_\theta(X) + \mathbb{E}_\theta(X)^2 = \theta_2 + \theta_1^2$  nimmt das Gleichungssystem (11.2) die folgende einfache Form an:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \theta_1 = g_1(\theta_1, \theta_2) \\ m_2 &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \theta_2 + \theta_1^2 = g_2(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \right\} =: \mathbf{g}(\theta) \quad (11.3)$$

und wir erhalten als Momentenschätzer sofort

$$\hat{\theta}_n = \left( \bar{X}_n, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X}_n)^2 \right) = \left( \bar{X}_n, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right),$$

also genau den im vorigen Abschnitt erhaltenen MLE (der asymptotisch erwartungstreu und stark konsistent ist).

Genauso wie Maximum Likelihood Schätzer haben auch Momentenschätzer unter nicht allzu restriktiven Regularitätsbedingungen gute asymptotische Eigenschaften - wie im vorigen Abschnitt formulieren wir nur das eindimensionale Resultat ohne genaue Angabe hinreichender Bedingungen; analoge Eigenschaften gelten auch im allgemeinen multivariaten Fall  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ :

**Satz 11.11** Sei  $X \sim (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  mit  $\Theta \subseteq \mathbb{R}$  und  $\hat{\theta}_n$  der Momentenschätzer von  $\theta$ . Weiters gelte  $g(\theta) = \mathbb{E}_\theta(X)$  für alle  $\theta \in \Theta$ . Unter gewissen Regularitätsvoraussetzung hat  $\hat{\theta}_n$  die folgenden Eigenschaften:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass  $\hat{\theta}_n$  existiert, geht für  $n \rightarrow \infty$  gegen 1.
2.  $\hat{\theta}_n$  ist konsistent für  $\theta$ , i.e. für jedes feste  $\theta_0 \in \Theta$  gilt: falls  $X \sim P_{\theta_0}$  dann folgt  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$ .
3.  $\hat{\theta}_n$  ist asymptotisch normal, i.e. für jedes feste  $\theta_0 \in \Theta$  gilt: falls  $X \sim P_{\theta_0}$  dann folgt

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{w} Z$$

$$\text{wobei } Z \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\mathbb{V}_{\theta_0}(X)}{(g'(\theta_0))^2}\right).$$

**Beispiel 11.12** Wir betrachten wieder die in Beispiel 11.9 behandelte Situation  $X \sim (\mathcal{E}(\theta))_{\theta \in (0, \infty)}$ . Die Existenz des Schätzers  $\hat{\theta}_n = 1/\bar{X}_n$  ist klar, starke Konsistenz ebenfalls. Auch die im vorhergehenden Satz behauptete asymptotische Normalität lässt sich mit Hilfe des CLT und der sogenannten  $\delta$ -Methode unschwer überprüfen.

**Beispiel 11.13** Für den Fall  $X \sim \text{Bin}(1, \theta)_{\theta \in [0, 1]}$  ist der Momentenschätzer offensichtlich gegeben durch  $\hat{\theta}_n = \bar{X}$ , er stimmt also mit dem MLE überein und ist stark konsistent. Wir haben schon in Beispiel 11.8 gezeigt, dass für  $X \sim \text{Bin}(1, \theta_0)$

$$Z_n = \sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sqrt{\theta_0(1 - \theta_0)}} \xrightarrow{w} Z$$

gilt, wobei  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Nachdem in diesem Fall  $g' = 1$  und  $\mathbb{V}_{\theta_0}(X) = \theta_0(1 - \theta_0)$  erhalten wir also genau die dritte, im vorhergehenden Satz behauptete Eigenschaft.

# Kapitel 12

## Appendix (nicht Prüfungsstoff)

**Beweis von Satz 4.4** Wir beweisen das (nichttriviale) Resultat in 2 Schritten und zeigen zuerst Super- und dann Sub- $\sigma$ -Additivität:

**Schritt 1:** (a) Die Familie  $\mathcal{I}_1$  gemäß (1.6) ist offensichtlich durchschnittsstabil und erfüllt, dass sich für  $(a_1, b_1] \subseteq (a_2, b_2]$  die Menge  $(a_2, b_2] \setminus (a_1, b_1]$  als disjunkte Vereinigung von maximal zwei Elementen von  $\mathcal{I}_1$  schreiben lässt. Wir definieren  $\mathcal{R}$  durch

$$\mathcal{R} := \left\{ \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] : n \in \mathbb{N}, (a_1, b_1], \dots, (a_n, b_n] \text{ paarweise disjunkt} \right\}$$

und setzen für  $\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] \in \mathcal{R}$

$$\mu_F \left( \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] \right) := \sum_{i=1}^n \mu_F((a_i, b_i]). \quad (12.1)$$

Beachten Sie, dass im Fall  $\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] \in \mathcal{I}_1$  Gleichung (12.1) automatisch gilt, die Fortsetzung von  $\mu_F$  auf  $\mathcal{R}$  also konsistent ist, dass  $\mathcal{R}$  wieder durchschnittsstabil ist, und abgeschlossen gegenüber endlichen Vereinigungen paarweise disjunkter Mengen ist.

(b)(1) Sei nun  $A, B \in \mathcal{R}$  und gelte  $A \subseteq B$ . Dann  $B = A \cup (B \setminus A)$  eine disjunkte Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{R}$  (und damit von Mengen aus  $\mathcal{I}_1$ ) und es gilt  $\mu_F(B) = \mu_F(A) + \mu_F(B \setminus A)$ , insbesondere also  $\mu_F(B) - \mu_F(A) = \mu_F(B \setminus A) \geq 0$ .

(b)(2) Für  $A, B \in \mathcal{R}$  gilt offensichtlich  $B = \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{R}} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{R}}$  sowie  $A \cup B = A \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{R}}$ ,

also auch

$$\mu_F(A) + \mu_F(B) = \mu_F(A) + \mu_F(B \setminus A) + \mu_F(A \cap B) = \mu_F(A \cup B) + \mu_F(A \cap B).$$

(b)(3) Für beliebige Mengen  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$  folgt mit  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n (A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j)$  und (b1), (b2)

$$\mu_F \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \mu_F \left( \bigcup_{i=1}^n \left( A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right) \leq \sum_{i=1}^n \mu_F(A_i).$$

(b)(4) Für beliebiges  $B \in \mathcal{R}$  und paarweise disjunkten Mengen  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$  mit  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq B$  gilt damit

$$\sum_{i=1}^n \mu_F(A_i) = \mu_F \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \mu_F(B)$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Im Falle  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = B$  erhalten wir also die gewünschte Super- $\sigma$ -Additivität auf ganz  $\mathcal{R}$ , und damit auch auf  $\mathcal{I}_1$ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i) \leq \mu_F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \quad (12.2)$$

**Schritt 2:** Wir zeigen die Umkehrung von Ungleichung (12.2) für Mengen in  $\mathcal{I}_1$ . Seien also  $(a_1, b_1], (a_2, b_2], \dots \in \mathcal{I}_1$  paarweise disjunkt und gelte  $\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] =: (a, b] \in \mathcal{I}_1$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Rechtsstetigkeit von  $F$  impliziert die Existenz von  $\alpha > a$  und  $\beta_i > b_i$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$  mit

$$F(\alpha) \leq F(a) + \varepsilon \quad \text{und} \quad F(\beta_i) \leq F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Für das kompakte Intervall  $[\alpha, b]$  gilt  $[\alpha, b] \subseteq (a, b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, \beta_i)$ , also (Definition von Kompaktheit oder Satz von Heine-Borel) existiert ein Index  $N \in \mathbb{N}$  mit  $[\alpha, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^N (a_i, \beta_i)$ . Nachdem Punkt (b1) und (b3)  $\mu_F([\alpha, b]) \leq \sum_{i=1}^N \mu_F((a_i, \beta_i])$  liefern, folgt insgesamt

$$\mu_F((a, b]) \leq \mu_F([\alpha, b]) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^N \left( \mu_F((a_i, b_i]) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F((a_i, b_i]) + 2\varepsilon$$

Nachdem  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung. ■

**Satz 12.1 (Satz von der monotonen Konvergenz)** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge nicht-negativer Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , die punktweise gegen  $X$  konvergiert. Dann ist  $X$  eine Zufallsvariable und es gilt<sup>†</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$$

**Beweis von Satz 12.1** Satz 5.1 und Bemerkung 5.2 implizieren die Messbarkeit von  $X$ , aus Gleichung (5.7) folgt  $\mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_{n+1}) \leq \mathbb{E}(X)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Setzen wir also  $a := \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) \in [0, \infty]$ , dann gilt offensichtlich  $a \leq \mathbb{E}(X)$ .

Um  $\mathbb{E}X \leq a$  zu zeigen gehen wir wie folgt vor: Sei  $Z \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A})$  und  $Z \leq X$ . Betrachte ein beliebiges aber festes  $c \in (0, 1)$  und setze

$$E_n := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \geq cZ(\omega)\} \in \mathcal{A}$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Offensichtlich ist  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und es gilt  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$ . Daraus folgt

$$\mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{E_n}) \geq \mathbb{E}(cZ \mathbf{1}_{E_n}) = c\mathbb{E}(Z \mathbf{1}_{E_n})$$

und für  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich  $a \geq c\mathbb{E}Z$ . Da  $c \in (0, 1)$  beliebig war folgt insgesamt  $a \geq \mathbb{E}Z$ . Nachdem außerdem auch  $Z \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A})$  beliebig war ergibt sich damit unter Verwendung von Gleichung (5.7)  $a \geq \mathbb{E}X$ . ■

**Satz 12.2 (Lemma von Fatou)** Für jede Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht-negativer Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  gilt

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n). \quad (12.3)$$

<sup>†</sup>der limes ist hier wiederum in  $[0, \infty]$  zu verstehen, i.e. falls  $\mathbb{E}X = \infty$  dann gilt für jedes  $M \in [0, \infty)$  ab einem Index  $n_0 = n_0(M)$  auch  $\mathbb{E}(X_n) > M$ .



**Beweis von Satz 12.2:** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und  $\omega \in \Omega$  setzen wir  $Y_n(\omega) := \inf_{k \geq n} X_k(\omega)$ . Dann gilt  $Y_n \leq X_n$  und damit  $\mathbb{E}(Y_n) \leq \mathbb{E}(X_n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Weiters ist die Folge  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend mit Grenzwert  $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$ . Die Aussage ergibt sich daher unmittelbar durch Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz. ■

**Satz 12.3 (Satz von der majorisierten Konvergenz)** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , die punktweise gegen  $X$  konvergiert. Weiters existiere eine integrierbare Zufallsvariable  $Y$  mit  $Y \geq |X_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$

**Beweis von Satz 12.3:** Wegen  $Y \geq |X_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt auch  $Y \geq |X|$ , somit ist  $X$  integrierbar. Weiters folgt  $|X_n - X| \leq 2Y$  und damit  $Z_n := 2Y - |X_n - X| \geq 0$ . Anwendung des Lemmas von Fatou auf die Folge  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  liefert

$$\mathbb{E}(2Y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(2Y - |X_n - X|) = \mathbb{E}(2Y) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|)$$

und damit  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$ . Daraus folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$ , und, unter Verwendung von Ungleichung (5.9)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$ . ■

**Satz 12.4 (Transformationssatz für zweidimensionale Dichten)** Sei  $(X, Y) \sim \mu_f$  und  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  Borel messbar. Weiters seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

1. Es existieren offene Mengen  $M_1, \dots, M_n$  mit  $\int_{\bigcup_{i=1}^n M_i} f(x, y) dx dy = 1$ .  $T_i$  bezeichne die Einschränkung von  $T$  auf  $M_i$ ,  $T_i^{-1}$  die Inverse davon.
2. Jedes  $T_i$  ist auf ganz  $M_i$  differenzierbar und injektiv und die Funktionaldeterminante  $\Delta_i$  von  $T_i$  ist ungleich 0.

Dann ist  $T_i(M_i)$  offen und  $T \circ (X, Y)$  absolut stetig mit Dichte

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{f \circ T_i^{-1}(x, y)}{|\Delta_i \circ T_i^{-1}(x, y)|} \mathbf{1}_{T_i(M_i)}(x, y).$$

# Literatur

- [1] A. Bathke, Statistik, Vorlesungsskriptum, Universität Salzburg, 2012
- [2] H. Bauer: *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter Verlag, 1992
- [3] P. Dalgaard: *Introductory Statistics with R*, Springer, 2008
- [4] J. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999
- [5] A. Klenke: *Probability Theory - a comprehensive course*, Springer, 2008
- [6] R.B. Nelsen: *An Introduction to Copulas*, Springer, 2006
- [7] W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1987
- [8] M. Thaler: Statistik, Vorlesungsskriptum, Universität Salzburg, 2011
- [9] L. Wasserman: *All of Statistics - A Concise Course in Statistical Inference*, Springer New York, 2004