2. Übung am 21. März 2022

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 7 (Fortsetzung von Aufgabe 6)**.** Es bezeichne $X_1, \ldots, X_n$ den mittels Test ermittelten IQ der Bewerber. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ setzen wir $Y_i := \mathbf{1}_{[120,\infty)} \circ X_i$. Der in der Übung besprochene Schätzer $\hat{\theta}_n$ von θ ist gegeben durch (Φ bezeichnet die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung)

$$\hat{\theta}_n = 120 - 5\Phi^{-}\left(1 - \overline{Y}_n\right).$$

Ist $\hat{\theta}_n$ (stark) konsistent? Ist $\hat{\theta}_n$ erwartungstreu?
Überprüfen Sie die Güte des Schätzers zusätzlich mittels Simulationen in R und gehen Sie wiefolgt vor:

1. Wählen Sie ein festes $\theta_0 \in [80, 120]$ und eine Sample Size $n \geq 500$.
2. Erzeugen Sie eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ von $X \sim \mathcal{N}(\theta_0, 5)$, berechnen Sie $Y_i := \mathbf{1}_{[120,\infty)} \circ X_i$, und setzen Sie $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$.
3. Berechnen Sie $\hat{\theta}_n = 120 - 5\Phi^{-}\left(1 - \overline{Y}_n\right)$.
4. Wiederholen Sie den zweiten und den dritten Schritt $R = 1.000$ Mal.

Übungsaufgabe 8 (Fortsetzung von Aufgabe 7)**.** Eine consulting Firma sucht neue Mitarbeiter mit Universitätsabschluss. Die Einstellungskriterien inkludieren eine Punktezahl von mindestens 120 bei einem (in der Firma zu absolvierenden) IQ-Test, wobei der IQ als $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$-verteilt mit unbekanntem θ und $\sigma > 0$ angenommen wird. Von 5000 Bewerbern schaffen 630 den Test, 4000 haben ein Testergebnis von mindestens 100. Schätzen Sie θ und σ. Überprüfen Sie Güte der erhaltenen Schätzers mit Hilfe von Simulationen in R.

Übungsaufgabe 9. Studieren Sie Abschnitt 2 im Skriptum.

Übungsaufgabe 10. Beweisen Sie die zwei im Beweis von Satz 2.3 am Ende behaupteten Eigenschaften.

Übungsaufgabe 11. Berechnen Sie approximativ in R die Verteilungsfunktion von d_n gemäß Gleichung (2.2) für die Samples Sizes $n \in \{20, 50, 100, 500, 1000\}$.

Übungsaufgabe 12. Berechnen Sie approximativ mit R die Überdeckungswahrscheinlichkeit des Intervalls (2.3) für verschiedene Sample Sizes n der Poisson Verteilung .