3. Übung am 28. März 2022

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 13. Beweisen Sie Satz 1.15 (einfache Version der δ-Methode).
Hinweis: Taylor

Übungsaufgabe 14. Leiten Sie mit Hilfe des CLT ein asymptotisches Konfidenzintervall für den Parameter θ der Poisson Verteilung her und überprüfen Sie dessen Güte mittels Simulationen in R.

Übungsaufgabe 15. Sei X_1, X_2 eine Zufallsstichprobe von $X \sim F$ mit F stetig. Zusätzlich nehmen wir vereinfachend an, dass $F(0) = 0$ und $F(1) = 1$ erfüllt ist. Beweisen Sie, dass dann $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0$ gilt.
Hinweis: Wegen $\mathbb{P}^{(X_1,X_2)}((0,1]^2) = 1$ kann beispielsweise wie folgt vorgegangen werden: Definiere (Skizze!)

$$R_N := \bigcup_{i=1}^{2^N} (\tfrac{i-1}{2^N}, \tfrac{i}{2^N}]^2$$

und zeige (unter Verwendung der Unabhängigkeit und der Stetigkeit der Verteilungsfunktion F), dass $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}^{(X_1,X_2)}(R_N) = 0$ gilt.

Übungsaufgabe 16 (Fortsetzung von Aufgabe 15)**.** Beweisen Sie $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0$ für den Fall einer beliebigen stetigen Verteilungsfunktion F (also ohne die Bedingungen $F(0) = 0$ und $F(1) = 1$)

Übungsaufgabe 17. In der Funktionalanalysis wird schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ meist wie folgt definiert ($C_b(\mathbb{R})$ bezeichne die Menge aller beschränkten, stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$): $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen μ (wir schreiben $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$) genau dann, wenn für jedes $f \in C_b(\mathbb{R})$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$$

Zeigen Sie eine der in folgender Aussage enthaltenen zwei Implikationen: Die beiden Definitionen sind äquivalent, i.e. $F_n \xrightarrow{w} F$ genau dann wenn $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, wobei μ_n das zu F_n gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet (siehe Lemma 4.3 im Statistik Skriptum).

Übungsaufgabe 18. X, Y seinen Zufallsvariable, A, B Borelmengen, und es gelte

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in B) = \alpha$$

für ein $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$2\alpha - 1 \leq \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \leq \alpha$$

und konstruieren Sie dann Beispiele, die zeigen, dass sowohl die linke als auch die rechte Ungleichung (wenn auch nicht simultan) zu Gleichungen werden können.