5. Übung am 25. April 2022

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 25 (Wiederholung @Lineare Algebra)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ orthogonal, i.e., es gelte $AA^T = E_d = A^T A$. Beweisen Sie, dass die von A induzierte lineare Abbildung $L_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Isometrie ist, i.e., dass für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ die Gleichheit

$$\|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$$

gilt. Inwiefern ist A orthogonal ähnlich zu einer Diagonalmatrix?

Übungsaufgabe 26. Sei $X = (X_1, X_2, \ldots X_d)$ multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^d$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Weiters sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär. Beweisen Sie, dass $Y = AX$ ebenfalls multivariat normalverteilt ist und berechnen Sie Mittelwert und Kovarianzmatrix. Welche spezielle Eigenschaft hat Y für den Fall, dass A sogar orthogonal ist? Illustrieren Sie das Resultat in Dimension $d = 2$ mit Hilfe von Simulationen in R (zur Erzeugung von Stichproben der multivariaten Normalverteilung kann die Funktion 'mvrnorm' verwendet werden).

Übungsaufgabe 27. Sei $X = (X_1, X_2)$ multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^2$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Weiters habe $A \in \mathbb{R}^{m \times 2}$ $(1 \leq m \leq d)$ den Rang r mit $1 \leq r \leq m$. Ist dann $Y = AX$ auch wieder (m-dimensional) normalverteilt? Was passiert im Falle von $r = 0$?

Übungsaufgabe 28. Beweisen Sie Lemma 3.6. und illustrieren Sie den Zusammenhang mittels Simulationen in R (konkret: Erzeugen Sie Stichproben von X und Y und vergleichen Sie die empirische Verteilungsfunktion von $\sqrt{n}\frac{X}{\sqrt{Y}}$ mit der t_{n-1}-Verteilung.)

Übungsaufgabe 29. Von der Normalverteilung wissen wir, dass das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz unabhänig sind. Zeigen Sie, dass auch das genau Gegenteil davon möglich ist, i.e., zeigen Sie die Existenz von Zufallsvariablen X, die $\mathbb{V}(X) > 0$ erfüllen, und folgende Eigenschaft haben: Es existiert eine Funktion $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sodass für Stichproben $X_1, \ldots, X_n$ von X die Gleichheit $S_n^2 = h(\overline{X}_n)$ gilt. In diesem Fall ist S_n^2 also sogar vollständig abhängig (!) von $\overline{X}_n$ (in dem Sinne, dass ersteres aus zweiterem berechnet werden kann).

Übungsaufgabe 30. Verwenden Sie Folgerung 3.11 um ein exaktes Konfidenzintervall für den Parameter μ der Normalverteilung (bei unbekanntem σ) herzuleiten und überprüfen Sie mittels Simulationen in R, ob das Intervall das tut, was es tun soll.