

6. Übung am 02. Mai 2022

UV Angewandte Statistik (405.170)

Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses

Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 31. Denken Sie Beispiel 4.8 Zeile für Zeile durch und verifizieren Sie dann mittels Simulationen in R (für verschiedene Sample Sizes n), dass der Konfidenzbereich C_n exakt mit Überdeckungswahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ ist.

Übungsaufgabe 32. Beweisen Sie: für $X \sim Ex(\theta)$ gilt $e^{-\theta X} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und damit $2\theta \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_{2n}^2$ [†]. Verwenden Sie diesen Zusammenhang dann, um ein exaktes Konfidenzintervall C_n für den Parameter θ der Exponentialverteilung herzuleiten und verifizieren Sie dessen Güte mittels Simulationen in R.

Übungsaufgabe 33 (Flaschenrückgabe). Der Datensatz `in_and_out.RData` enthält die Anzahl der pro Tag verkauften und retournierten Flaschen[†], wobei bekannt ist, dass die Zeit D zwischen dem Verkauf und der Rückgabe einer Flasche geometrisch verteilt ist. Schätzen Sie $\mathbb{E}(D)$.

Übungsaufgabe 34. Überlegen Sie sich den in der letzten UV diskutierten Zusammenhang zwischen den 'Hauptachsen' des Scatterplots der Stichprobe einer zweidimensionalen Normalverteilung und der Kovarianzmatrix Σ (es reicht, $\mu = (0, 0)$ zu betrachten).

Übungsaufgabe 35. Angenommen, für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$. Konvergiert dann $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach und, wenn ja, wogegen?

Übungsaufgabe 36. Angenommen, die Verteilungsfunktionen F, F_1, F_2, \dots sind absolut stetig mit Wahrscheinlichkeitsdichten f, f_1, f_2, \dots und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| d\lambda(x) = 0.$$

Folgt dann, dass $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen F konvergiert? Wie lautet Ihre Antwort, wenn stattdessen $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)| = 0$ für λ -fast jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt?

[†]der zweite Teil muss nicht bewiesen werden, siehe Additionstheorem für die Gamma-Verteilung im Skriptum Mathematische Statistik

[†]am ersten Tag wurden als 5668 verkauft und schon 61 (davon) retourniert