3. Übung am 08. November 2021

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 13 Die Lebensdauern X_1 und X_2 zweier Bauteile seien exponentialverteilt mit Parameter $\theta = 2$ und unabhängig. Mit anderen Worten[†]: der Vektor (X_1, X_2) ist absolut stetig mit Dichte $f(x_1, x_2) = 4e^{-(2x_1+2x_2)}\mathbf{1}_{[0,\infty)^2}(x_1, x_2)$.
Berechnen Sie $\mathbb{P}(X_2 < X_1), \mathbb{P}(X_2 = X_1)$ sowie $\mathbb{P}(|X_1 - X_2| \leq 1)$.
Hinweis: Eine Skizze (und Beispiel 3.5) hilft.

Übungsaufgabe 14 Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel messbar. Beweisen Sie, dass der Graph von f, definiert durch $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ eine zweidimensionale Borelmenge ist (also dass $\Gamma(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ gilt). Ist auch der Endograph $\Gamma^{\leq}(f)$, definiert durch $\Gamma^{\leq}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$ eine zweidimensionale Borelmenge?
Hinweis: Nachdem die Identität $i(x) = x$ Borel messbar ist, ist auch die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\Psi(x, y) := (f(x), y)$$

Borel messbar (warum?). Damit lassen sich beide Fragen sehr einfach beantworten.

Übungsaufgabe 15 Sei $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton (nicht notwendigerweise streng) wachsende Funktion. Beweisen Sie, dass T höchsten abzählbar unendlich viele Sprungstellen hat. Was bedeutet dies für Verteilungsfunktionen F?

Übungsaufgabe 16 Beweisen Sie: Es existiert eine diskrete Zufallsvariable X für die die Verteilungsfunktion F_X strikt wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

Übungsaufgabe 17 Betrachten Sie die folgende Funktion für $a > 0$:

$$F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 - e^{-ax^2}) & \text{für } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F_a eine Verteilungsfunktion ist und berechnen Sie für $X \sim F_a$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq 1), \mathbb{P}(X \geq 1), \mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X < 1), \mathbb{P}(X = 0), \mathbb{P}(X \in \mathbb{Q})$.
Ist F_a absolut stetig?

Übungsaufgabe 18 Gelte $X \sim F_1$ mit F_1 aus der letzten Aufgabe (also $a = 1$). Berechnen Sie die Verteilungsfunktion G von X^n für ein festes $n \in \mathbb{N}$, sowie die Verteilungsfunktion G von $\sqrt{X}$.

[†]muss nicht nachgerechnet werden