4. Übung am 15. November 2021

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 19 Die in Beispiel 4.5 konstruierte Funktion C_∞ heisst Cantorfunktion weil sie analog zur Mittel-Drittel Cantormenge[†] konstruiert ist. Wie sieht die resultierende Menge $C^\star = \bigcap_{n=1}^\infty C_n$ aus, wenn wir im ersten Schritt in der Mitte 1 Intervall der Länge $\frac{1}{9}$, im zweiten Schritt 2 Intervalle der Länge (von jeweils) $\frac{1}{9^2}$, im n-ten Schritt 2^{n-1} Intervalle der Länge $\frac{1}{9^n}$ herausnehmen? Berechnen Sie $\lambda(C^\star)$. Enthält $C^\star$ ein nicht-degeneriertes Intervall, also ein Intervall mit Länge > 0? Enthält $(C^\star)^c$ ein nicht-degeneriertes Intervall?

Übungsaufgabe 20 Betrachten Sie die folgende Funktion für $a > 0$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{3} + a(1 - e^{-x}) & \text{für } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Bestimmen Sie a so, dass F eine Verteilungsfunktion ist. Hat F einen diskreten, einen absolut stetigen und einen singulären Anteil? Berechnen Sie für $X \sim F$ die Verteilungsfunktion von X^2. Wie könnten ausgehend von einer Stichprobe $U_1, \ldots, U_n$ von $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ Stichproben von $X \sim F$ erzeugt werden? Implementieren Sie den Algorithmus in R, erzeugen Sie Stichproben der Größe $n \in \{100, 1000, 10000\}$ und plotten Sie die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_n$ zusammen mit F.

Übungsaufgabe 21 Beweisen Sie vier der Aussagen 3-9 in Satz 4.12.

Übungsaufgabe 22 Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Voraussetzung der Stetigkeit essentiell für die Aussage 1 (PIT) in Satz 4.13 ist.

Übungsaufgabe 23 Sei F in $\mathcal{F}$ eine beliebige, aber feste Verteilungsfunktion. Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X \sim F$. Hinweis: Es genügt, $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ zu betrachten und $\mathbb{P}$ und X passend zu wählen.

Übungsaufgabe 24 F und G seien eindimensionale Verteilungsfunktionen, A sei eine Copula (siehe Definition 4.28). Beweisen Sie, dass dann $H : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, definiert durch

$$H(x, y) = A(F(x), G(y)), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

eine zweidimensionale Verteilungsfunktion ist (Aufwärmübung).

[†] Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Menge