5. Übung am 22. November 2021

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 25 Ein Wahrscheinlichkeitsmass μ auf $\mathcal{B}([0,1]^2)$ heisst *doppelt stochastisch* genau dann wenn für jedes $E \in \mathcal{B}([0,1])$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\mu(E \times [0,1]) = \mu([0,1] \times E) = \lambda(E)$$

Beweisen Sie, dass durch $A(x,y) = \mu([0,x] \times [0,y])$ jeder Copula (siehe Definition 4.28) genau ein doppelt stochastisches Mass (und umgekehrt) zugeordnet wird. Zeigen Sie dann, dass das der Minimum-Copula M entsprechende doppelte stochastische Maß μ_M der Diagonale $\Delta := \{(x,x) \in [0,1]^2 : x \in [0,1]\}$ volle Masse zuweist, i.e., dass $\mu_M(\Delta) = 1$ gilt.

Übungsaufgabe 26 Eine messbare Abbildung $h : [0,1] \to [0,1]$ heisst λ-treu genau dann, wenn $\lambda^h = \lambda$ gilt[†]. Geben Sie vier verschiedene Beispiele für solche λ-treuen Transformationen an und zeigen Sie, dass für beliebige λ-treue Abbildungen $h, g : [0,1] \to [0,1]$ die Funktion A, definiert durch

$$A(x,y) = \lambda(h^{-1}([0,x]) \cap g^{-1}([0,y]))$$

eine Copula ist.

Übungsaufgabe 27 (*) Angenommen, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge λ-treuer Transformationen auf $[0,1]$, die punktweise gegen eine Funktion $h : [0,1] \to [0,1]$ konvergiert. Ist dann auch h λ-treu?

Übungsaufgabe 28 Beweisen Sie Satz 4.32 über die Transformationsinvarianz von Copulas.

Übungsaufgabe 29 Angenommen $X \sim \mathcal{E}(2\theta)$ und $Y \sim \mathcal{E}(\theta)$ mit $\theta > 0$. Berechnen Sie die maximale Wahrscheinlichkeit für $\mathbb{P}(X = Y)$ unter Verwendung von Satz 6 in Copulas_Anwendungsbeispiel.pdf.

Übungsaufgabe 30 **(a)** Geben Sie ein Beispiel dafür, dass eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, die die Punkte (F1) und (F2) in Lemma 4.18 erfüllt, und monoton wachsend in beiden Koordinaten ist, im Allgemeinen keine Verteilungsfunktion sein muss.
(b) Wir schwächen Bedingung (F2) in Lemma 4.18 ab auf die Bedingung (F2'), gegeben durch

$$\lim_{x_1,x_2\to-\infty} F_X(x_1,x_2) = 0; \qquad \lim_{x_1,x_2\to\infty} F_X(x_1,x_2) = 1$$

Ist jede Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, die (F1), (F2'), (F3) erfüllt, die Verteilungsfunktion eines Zufallsvektors (X_1, X_2)?

[†] i.e. $\lambda(h^{-1}(E)) = \lambda(E)$ für jedes $E \in \mathcal{B}([0,1])$