8. Übung am 13. Dezember 2021

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 43 Denken Sie den Beweis von Satz 6.4 Zeile für Zeile durch. Lesen Sie zusätzlich als Wiederholung (zur Wahrscheinlichkeitsrechnung) Abschnitt 6.2.

Übungsaufgabe 44 Wir betrachten die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Beispiel 6.8: Zeigen Sie, dass sich $X_n^{-1}(\{j\})$ so berechnen lässt wie angegeben, berechnen Sie $P(X_n = j) = P^{X_n}(\{j\})$ und zeigen Sie, dass die Familie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise unabhängig ist.
Zusatz*: Zeigen Sie die Unabhängigkeit von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Übungsaufgabe 45 (Fortsetzung von Beispiel 5.31) Finden Sie unendlich viele (von T_a verschiedene) λ-treue Transformationen $T : [0,1] \to [0,1]$, sodass X und $T \circ X$ unkorreliert sind.

Übungsaufgabe 46 Ein Tiroler beschließt, während einer stockdunklen Nacht bei seiner (3 Gehstunden entfernt wohnenden) Angebeteten fensterln† zu gehen. Um den Weg besser sehen zu können, nimmt er eine Taschenlampe und 2 Batterien, deren Lebensdauer $T \sim Ex(1)$ erfüllt, mit. Ist die erste Batterie entladen, nimmt er die zweite in Betrieb. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Taschenlampe bis zur Ankunft funktioniert. Wie stark erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, wenn er 3 statt 2 Batterien mitnimmt? Bestätigen Sie Ihr Ergebnis mittels Simulationen in R.
Hinweis: Satz 6.10

Übungsaufgabe 47 Eine Verteilungsfunktion $F \in \mathcal{F}$ (bzw. das F entsprechende Wahrscheinlichkeitsmaß μ_F) heißt unendlich teilbar genau dann, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ existieren, sodass $\sum_{i=1}^n X_i$ Verteilungsfunktion F hat. Geben Sie (entweder via Literaturrecherche oder u.a. durch Anwendung von Satz 6.15 und Satz 6.21) mindestens drei Beispiele für unendlich teilbare Verteilungen und begründen Sie, warum selbige tatsächlich unendlich teilbar sind.

Übungsaufgabe 48 X, Y seien Zufallsvariable mit stetiger Verteilungfunktion F bzw. G. Beweisen Sie: (X, Y) hat Copula M genau dann, wenn eine nichtfallende Transformation $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $Y = T \circ X$ $[\mathbb{P}]$ gilt.

---

†https://de.wikipedia.org/wiki/Fensterln