13. Übung am 24. Jänner 2023

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 68 (Aufwärmübung) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Zufallsstichprobe von $X \sim Pois(\theta)$ und $\hat{\theta}_n := \overline{X}_n$. In welchem Sinne konvergiert $(\hat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen θ?

Übungsaufgabe 69 Sei X exponentialverteilt mit Parameter $\theta > 0$ und $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe von X. Welche Eigenschaften (Erwartungstreue und Konsistenz) hat der Schätzer $\hat{\theta}_n := \frac{1}{\overline{X}_n}$ von θ?
Hinweis: Wenn ein Schätzer erwartungstreu ist, dann gilt die Eigenschaft für JEDE sample size n.

Übungsaufgabe 70 Die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariable X sei streng monoton wachsend auf $[a, b]$ (mit $a < b$) und erfülle $F(a) = 0, F(b) = 1$. $(X_1, \ldots, X_n)$ sei eine Zufallsstichprobe von X, und die Zufallsvariable $X_1^{(1)}, X_n^{(n)}$ seien definiert durch

$$X_n^{(1)}(\omega) = \min\big\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big\}, \quad X_n^{(n)}(\omega) = \max\big\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big\}.$$

Berechnen sie die Verteilungsfunktion von $X_n^{(1)}$ und jene von $X_n^{(n)}$ und beweisen Sie, dass $X_n^{(1)} \xrightarrow{P} a$ sowie $X_n^{(n)} \xrightarrow{P} b$ gilt.

Übungsaufgabe 71 Beweisen Sie die ersten beiden Aussagen des Continuous mapping theorems für den Fall, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.
Hinweis: Das Teilfolgenprinzip für die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit erleichtert einen der beiden Beweise signifikant.